

1. СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Основні визначення, поняття і аксіоми статистики. Предмет статистики

Статикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються загальні положення про сили, їх приведення до найпростішого вигляду та умови рівноваги матеріальних тіл, на які діють ці сили.

Під *рівновагою* розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл. Умови рівноваги істотно залежать від того, чи є тіло твердим, *пружним*, рідким, газоподібним. У загальному курсі теоретичної механіки розглядаються тільки задачі про рівновагу абсолютно твердих тіл.

У статистиці розв'язуються такі основні задачі: 1) приведення системи сил, що діють на абсолютно тверде тіло, до найпростішого вигляду; 2) визначення умов рівноваги сил, які діють на абсолютно тверде тіло. Ці задачі статистики можна розв'язувати шляхом відповідних геометричних побудов або за допомогою числових розрахунків.

Матеріальна точка - це матеріальне тіло, розмірами якого при вирішенні конкретної задачі можна знехтувати, або геометрична точка, яка наділена певною масою.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, відстань між частками якого залишається постійною. Тобто абсолютно тверде тіло зберігає свою геометричну форму незалежно від дії інших сил.

Сила – фізична величина, яка є кількісною мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами. Сила - величина векторна, її дія на абсолютно тверде тіло визначається: значенням або модулем сили; напрямом дії сили; точкою, в якій вона прикладена. Пряма *aa* (рис. 1.1), уздовж якої спрямована сила, називається *лінією дії сили*. Основною одиницею сили є 1 ньютон (Н). Це сила, яка масі в 1 кг надає прискорення в 1 м/с² ($1\text{Н} = 1\text{ кг} \cdot 1\text{ м/с}^2 = 1\text{ кг}\cdot\text{м/с}^2$).

Графічно сила зображується спрямованим відрізком-вектором (рис. 1.1), довжина якого виражає у вибраному масштабі величину сили, а напрям відрізка відповідає напрямку сили. Силу позначатимемо буквою $\vec{F}$, а її величину (модуль) як F чи $|\vec{F}|$. Сукупність сил, що діють на абсолютно тверде тіло, називати-

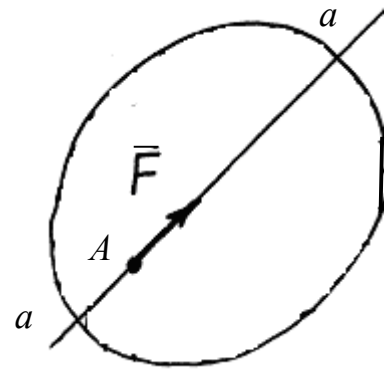


Рис. 1.1

memo системою сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$. Наведемо ще такі визначення:

1. Тіло, яке не взаємодіє з іншими тілами і якому з даного положення можна надати будь-яке переміщення у просторі, називається *вільним*.

2. Якщо одну систему сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$, що діють на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_m)$, не порушуючи при цьому стану спокою чи руху, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються *еквівалентними*: $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_m)$.

3. Система сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$, під дією якої вільне тверде тіло знаходиться у стані спокою, називається *зрівноваженою*, або *еквівалентною нулю*: $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$.

4. Якщо задана система сил $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n)$ еквівалентна одній силі, то ця сила називається *рівнодійною* $\vec{R}$ заданої системи сил: $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n) \sim \vec{R}$.

5. Сила, яка прикладена до тіла в точці, називається *зосередженою*. *Точкою прикладання* сили називається та матеріальна частка тіла, до якої ця сила безпосередньо прикладена.

6. Сили, що діють на всі точки довжини, поверхні чи об'єму, називаються *розподіленими*.

Величину сили, яка припадає на одиницю довжини, площі або об'єму, називають *інтенсивністю*. Звичайно розподілену силу позначають буквою q , яка має розмірність Н/м, Н/м², Н/м³ відповідно. Прикладами розподілених сил є: тиск циліндричного котка на поверхню дороги; тиск колеса трамваю на рейку; тиск

снігового шару на покрівлю; тиск рідини на стінки трубопроводу, посудини, греблі; сили ваги тіла та ін. Позначають характер дії розподілених сил графіком (епюрою). На рис.1.2, а, б, в наведено відповідно епюри рівномірної, трикуткової і довільної інтенсивностей діючих сил.

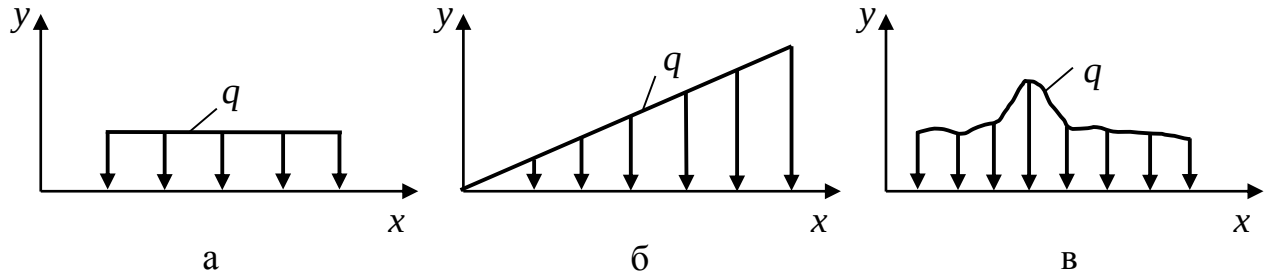


Рис.1.2

7. *Зовнішні сили* - це сили, що діють на тіло або механічну систему з боку матеріальних точок або інших тіл, які не входять в цю систему.

8. *Внутрішні сили* - це сили взаємодії між точками однієї механічної системи.

1.2. Класифікація систем сил

При вивченні статyki будемо послідовно переходити від розгляду простих систем сил до більш складних, системи сил можна класифікувати так:

- система збіжних сил, плоска й просторова;
- плоска система паралельних сил;
- довільна плоска система сил;
- просторова система паралельних сил;
- довільна просторова система сил.

1.3. Аксиоми статyki

В основі статyki лежить ряд аксіом, що являють собою результат узагальнень численних дослідів і спостережень за рівновагою і рухом тіл, неодноразово підтверджених практикою. Аксиоми статyki є вихідними положеннями дослідного характеру, що приймаються без доведення. Вони формулюються так.

Аксіома 1. Вільне абсолютно тверде тіло може знаходитися під дією двох сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ у рівновазі тоді й тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ і діють уздовж однієї прямої aa у протилежних напрямках (рис. 1.3):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

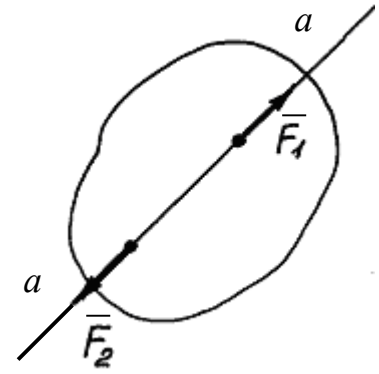


Рис. 1.3

У механіці така система сил має назву “двійка сил”.

Ця аксіома визначає найпростішу зрівноважену систему двох сил, оскільки досліди свідчать, що вільне тіло, на яке діє тільки одна сила, знаходиться в рівновазі не може.

Аксіома 2. Дія заданої системи сил на абсолютно тверде тіло не порушується, якщо до неї додати або відняти зрівноважену систему сил (наприклад, двійку сил).

Наслідок з аксіоми 2. Не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, точку прикладання сили можна переносити вздовж її лінії дії.

Доведення. Нехай на абсолютно тверде тіло діє сила $\vec{F}$, прикладена в точці А (рис. 1.4). Візьмемо на лінії дії aa цієї сили довільну точку В і прикладемо в ній дві сили $\vec{F}_1, \vec{F}_1'$ (двійку сил), що дорівнюють за величиною силі $\vec{F}$, тобто $(F = F_1 = F_1')$.

Таку двійку сил можемо прикласти на підставі аксіоми 2. Сила $\vec{F}$, яка прикладена в точці А, і сила $\vec{F}_1$, прикладена в точці В, складають, за побудовою, зрівноважену систему сил. Тому її можна відкинути, не порушуючи стану рівноваги тіла. Отже, залишається

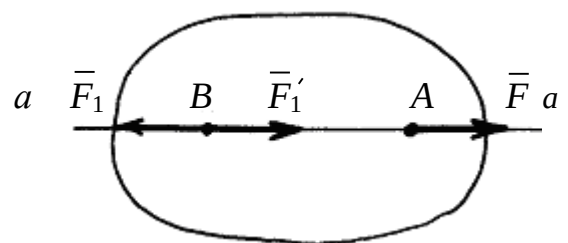


Рис. 1.4

сила $\vec{F}_1'$, яка прикладена в точці В і дорівнює за величиною початковій силі $\vec{F}$. За інженерними розрахунками цим наслідком можна користуватися лише тоді, коли визначаються умови рівноваги конструкції і не розглядаються внутрішні

зусилля, що виникають в її окремих частинах. Цей наслідок визначає силу як вектор, що ковзає по власній лінії дії, не залишаючи тіло (сила є ковзним вектором).

Аксиома 3 (аксіома про паралелограм сил). Система двох сил, прикладених в одній точці до абсолютно твердого тіла, має рівнодійну, яка зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, і прикладена в тій самій точці (рис. 1.5).

Вектор $\vec{R}$, який дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, як на сторонах, називається *геометричною сумою* цих векторів:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

У цій аксіомі сформульовано правило векторного додавання сил. Тому її можна

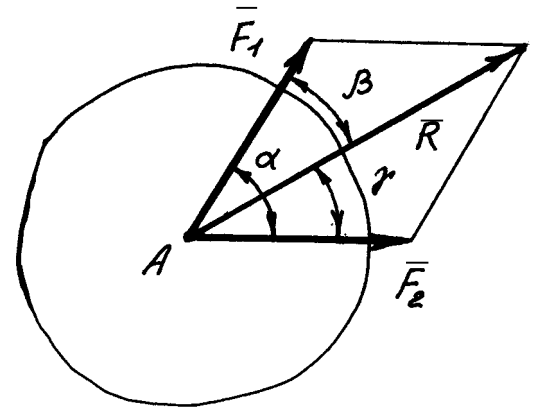


Рис. 1.5

сформулювати ще так: дві сили, які прикладені до абсолютно твердого тіла в одній точці, мають рівнодійну, що дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил і прикладена в тій самій точці.

Модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}, \quad (1.2)$$

де α - кут між векторами $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

При однаковому напрямі сил ($\cos \alpha = 1$) $R = F_1 + F_2$, а при протилежному ($\cos \alpha = -1$) $R = F_1 - F_2$.

Будь-яку силу $\vec{R}$ також можна єдиним способом розкласти на дві складові сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ за двома заданими напрямками, які утворюють кути β і γ з напрямком цієї сили:

$$F_1 = R \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}; \quad F_2 = R \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}. \quad (1.3)$$

Аксіома 4. Сили взаємодії двох матеріальних тіл $\bar{F}_{12}$ (сила дії тіла 1 на тіло 2) і $\bar{F}_{21}$ завжди рівні за величиною ($F_{12} = F_{21}$) і діють по одній прямій aa у протилежних напрямках (рис. 1.6).

Ця аксіома є третім законом Ньютона. Сили взаємодії двох тіл не створюють систему зрівноважених сил (двійку сил), бо вони прикладені до різних тіл.

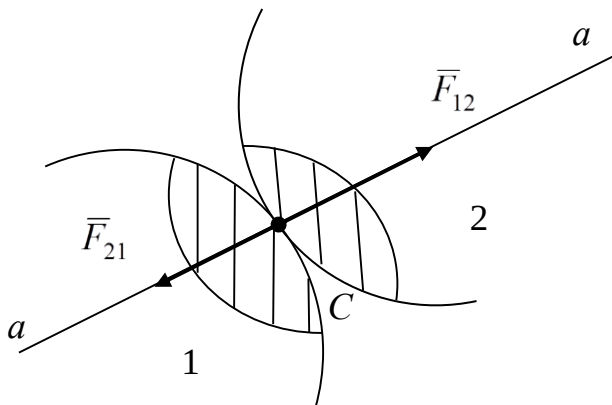


Рис. 1.6

Аксіома 5. Рівновага здеформованого тіла не порушиться, якщо воно затвердіє.

Аксіома 6. Невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Ця аксіома має також назву – принцип звільнення від в'язей, який використовують при складанні рівнянь рівноваги будь-якої конструкції.

У статиці також зустрічаються задачі про рівновагу тіла, що складається з декількох твердих тіл, зв'язаних між собою. Таке тіло знаходиться в рівновазі, якщо в рівновазі перебувають всі складові тіла. У деяких випадках таке тіло розглядають як одне абсолютно тверде тіло.

Принцип затвердіння широко використовується в інженерних розрахунках.

1.4. Проекція сили на вісь, площину

Проекція сили на вісь – алгебраїчна величина, яка дорівнює довжині відрізка між проекціями початку і кінця сили на цю вісь. Проекція має знак “+”, якщо вектор сили нахилений у бік додатнього напрямку осі, і знак “-” – якщо в бік від’ємного напрямку. Тому (рис.1.7,а) буде $F_x = F \cdot \cos\alpha$, $F_y = F \cdot \sin\alpha$, $T_x = 0$, $T_y = T$. Якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на цю вісь дорівнює нулю.

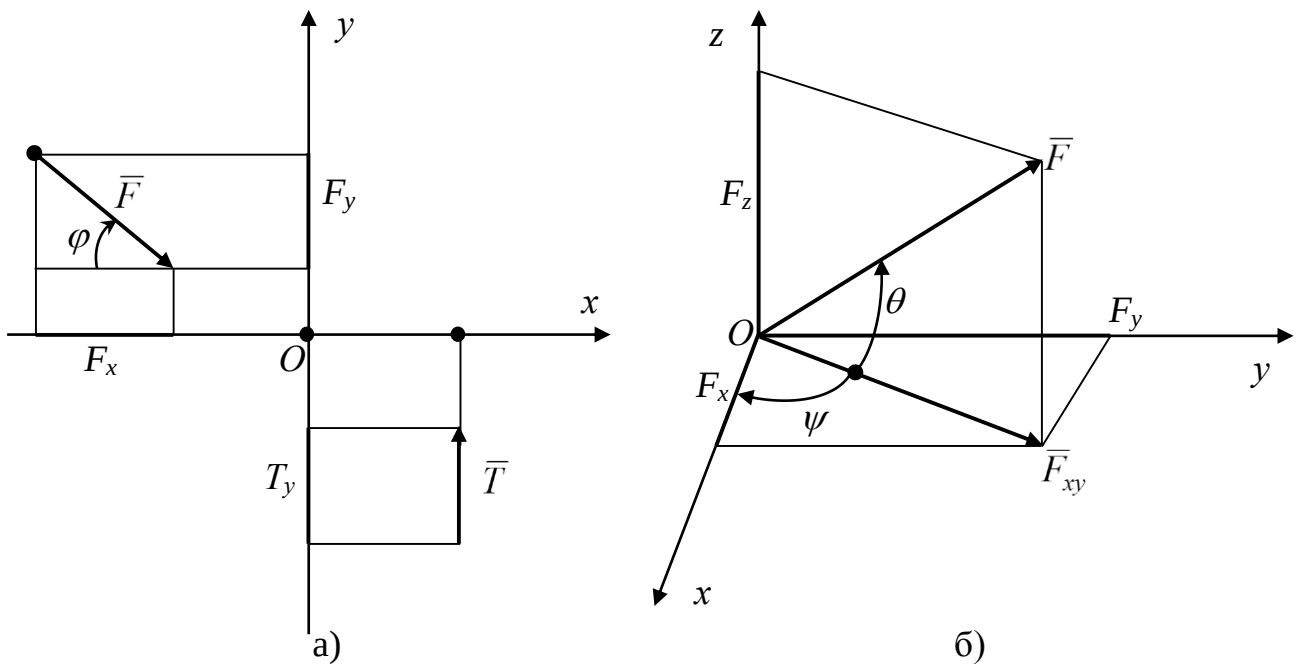


Рис. 1.7

Проекцією сили на площину називається вектор, який міститься між проекціями початку і кінця даної сили на площину (рис. 1.7,б). Таким чином, проекція сили на площину, на різницю від проекції сили на вісь, є величиною векторною. На рис. 1.7, б вектором $\vec{F}_{xy}$ позначена проекція сили $\vec{F}$ на площину xOy , а її проекції на осі Ox , Oy , Oz визначаються так:

$$F_x = F_{xy} \cos\psi = F \cos\theta \cdot \cos\psi; \quad F_y = F_{xy} \sin\psi = F \cos\theta \cdot \sin\psi;$$

$$F_z = F \sin\theta.$$

Тут величини F_x і F_y визначено методом подвійного проектування: спочатку знаходиться проекція сили на площину xOy , а потім отриманий вектор $\vec{F}_{xy}$ проектується на осі Ox і Oy .

1.5. Розклад сили на координатні складові

Відповідно до аксіоми 3 про паралелограм сил кожену силу можна розкласти на складові. Якщо їх лінії дії паралельні осям системи координат, то вони називаються *координатними складовими* сили у площині (сили $\vec{P}_{1x}, \vec{P}_{1y}, \vec{P}_{2x}, \vec{P}_{2y}$ на рис. 1.8,а) або у просторі (сили $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ на рис. 1.8,б). При побудові координатних складових в першому випадку використовують метод прямокутника, а у другому – метод паралелепіпеда, відповідно до якого вектор $\vec{F}$ сили уявляють діагоналлю паралелепіпеда (рис. 1.8,б), ребра якого приймають за її складові $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$.

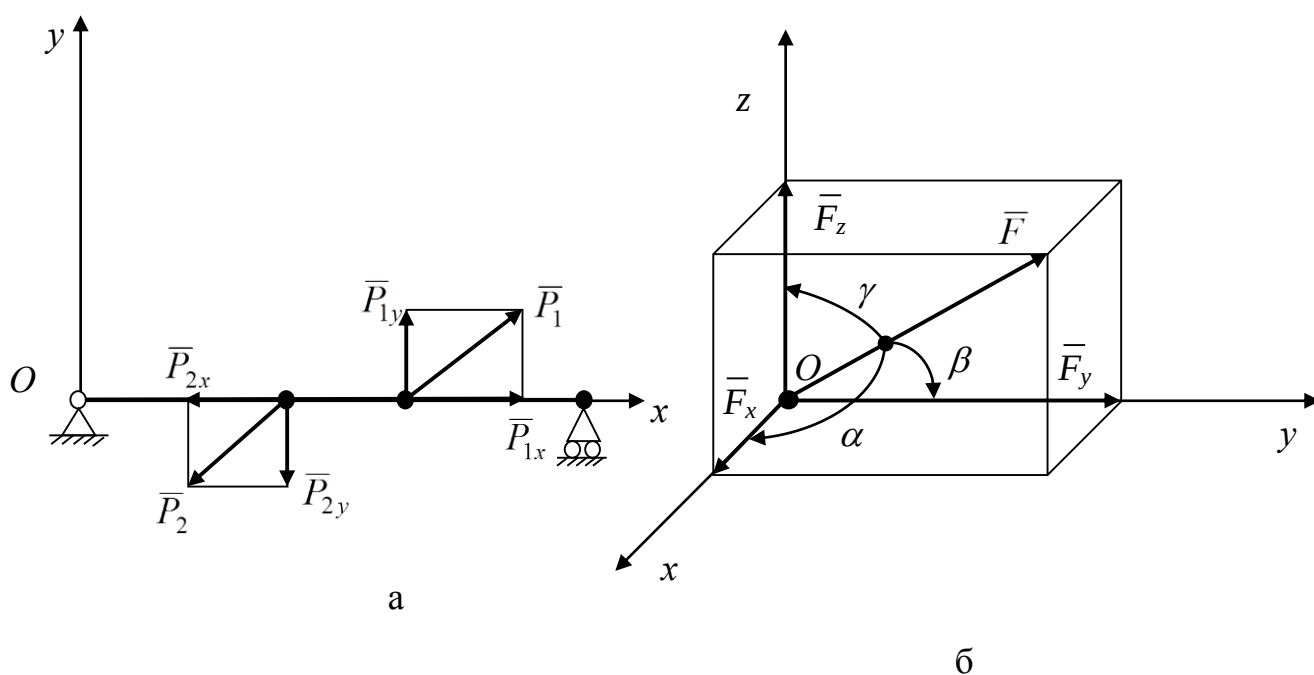


Рис. 1.8

У техніці процедуру розкладу сили на координатні складові використовують при розв'язанні задач рівноваги твердого тіла, наприклад, при складанні рівнянь моментів сил. Тут для координатних складових просто

визначаються плечі сил, а деякі моменти складових виявляються рівними нулю за побудовою. Величини координатних складових розраховують за допомогою розглянутих в розділі 1.4 формул. Але якщо у просторі задано кути α, β, γ між вектором сили $\vec{F}$ (рис. 1.8,б) і осями системи координат, то краще користуватися наступними виразами: $F_x = F \cos \alpha$; $F_y = F \cos \beta$; $F_z = F \cos \gamma$.

2. В'ЯЗИ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ

В'язями називають тіла або сукупність тіл, які обмежують рух даного тіла чи даної матеріальної системи. За аксіомою 6 невідільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Звільнення від в'язей дає можливість звести рівновагу невідільного твердого тіла до відповідного питання про рівновагу вільного твердого тіла, яке знаходиться під дією одночасно зовнішніх сил і реакцій в'язей.

Сила, з якою в'язь діє на тіло, щоб перешкодити будь-яким його переміщенням, називається *реакцією в'язі*. Визначення реакцій в'язей має велике практичне значення: знаючи їх, будемо знати і сили тиску тіла на в'язі, які необхідні для розрахунку міцності відповідних частин конструкції.

Надалі сили, які не є реакціями в'язей (наприклад, сила тяжіння), будемо називати *активними силами*. Особливість активної сили полягає в тому, що її модуль і напрям безпосередньо не залежать від інших сил, які діють на тіло. Реакції в'язей відрізняються від діючих на тіло активних сил тим, що їх напрямки і величини завжди залежать від цих сил і наперед невідомі. Якщо ніякі активні сили на тіло не діють, то реакції в'язей дорівнюють нулю. Для визначення реакції в'язі потрібно розв'язати відповідну задачу статички. Правильне визначення напрямів реакцій в'язей відіграє при розв'язуванні задач статички дуже важливу роль.

Розглянемо докладніше, як спрямовані реакції деяких основних типів в'язей.

Ідеально гладенька поверхня. Реакція такої поверхні спрямована перпендикулярно до дотичної площини, проведеної до поверхні цієї опори у точці стикання з даним тілом (рис. 2.1, а).

У випадках, коли спільна нормаль до поверхонь в'язі й тіла виявляється неозначеною, наприклад, вироджується в точку, то реакція в'язі спрямована по нормалі до цієї поверхні, до якої можна провести нормаль. Прикладом може бути опора ребром або вершиною кута (рис. 2.1,б,в).

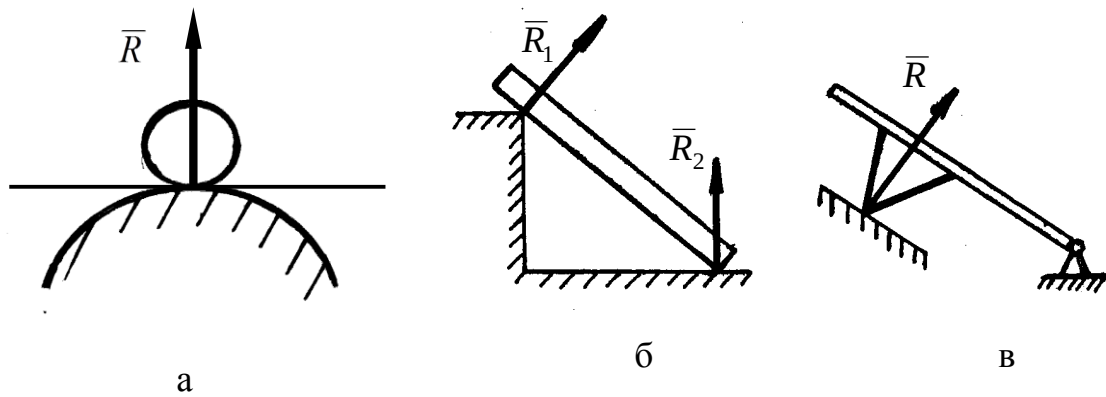


Рис. 2.1

В'язь, що здійснюється гнучким тілом, ниткою або канатом, тросом, ланцюгом. Такі в'язі (рис. 2.2) працюють тільки на розтяг, їх реакції напрямлені по нитці. В'язь, реалізована в даному вигляді, не дає змоги тілу віддалятися від точки підвісу за напрямом AM . Тому реакція $\bar{T}$ нитки AM спрямована завжди вздовж нитки до точки підвісу A . У задачах теоретичної механіки припускають, що нитка є невагомою, гнучкою і нерозтяжною.

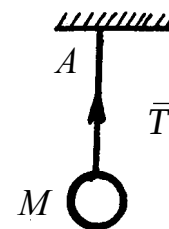


Рис. 2.2

Шарнір циліндричний (сферичний), підп'ятник. З'єднання двох тіл, яке дає змогу одному тілу повертатися відносно іншого, не відділяючись, називається *шарніром*.

Нерухомий циліндричний шарнір. Він звичайно складається з обойми 1, яка закріплена на нерухомій опорі 2, і циліндричного вала 3 (рис. 2.3,а). Тут з'єднане з валом 3 тіло може обертатися тільки навколо осі O шарніра. Реакція $\bar{R}$ циліндричного шарніра перпендикулярна до його осі і має напрям, який залежить від сил, прикладених до тіла. Тому її виражають у вигляді взаємно перпендикулярних координатних складових $\bar{X}_0$, $\bar{Y}_0$, тобто $\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0$ і $R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$.

Рухомий циліндричний шарнір (коток). Цей вид в'язі не дає змоги тілу переміщатися в напрямі, перпендикулярному до опорної поверхні котка. Його реакція $\bar{R}$ (рис. 2.3,б) напрямлена завжди по нормалі до опорної площини. Опора на котках застосовується звичайно в мостових конструкціях.

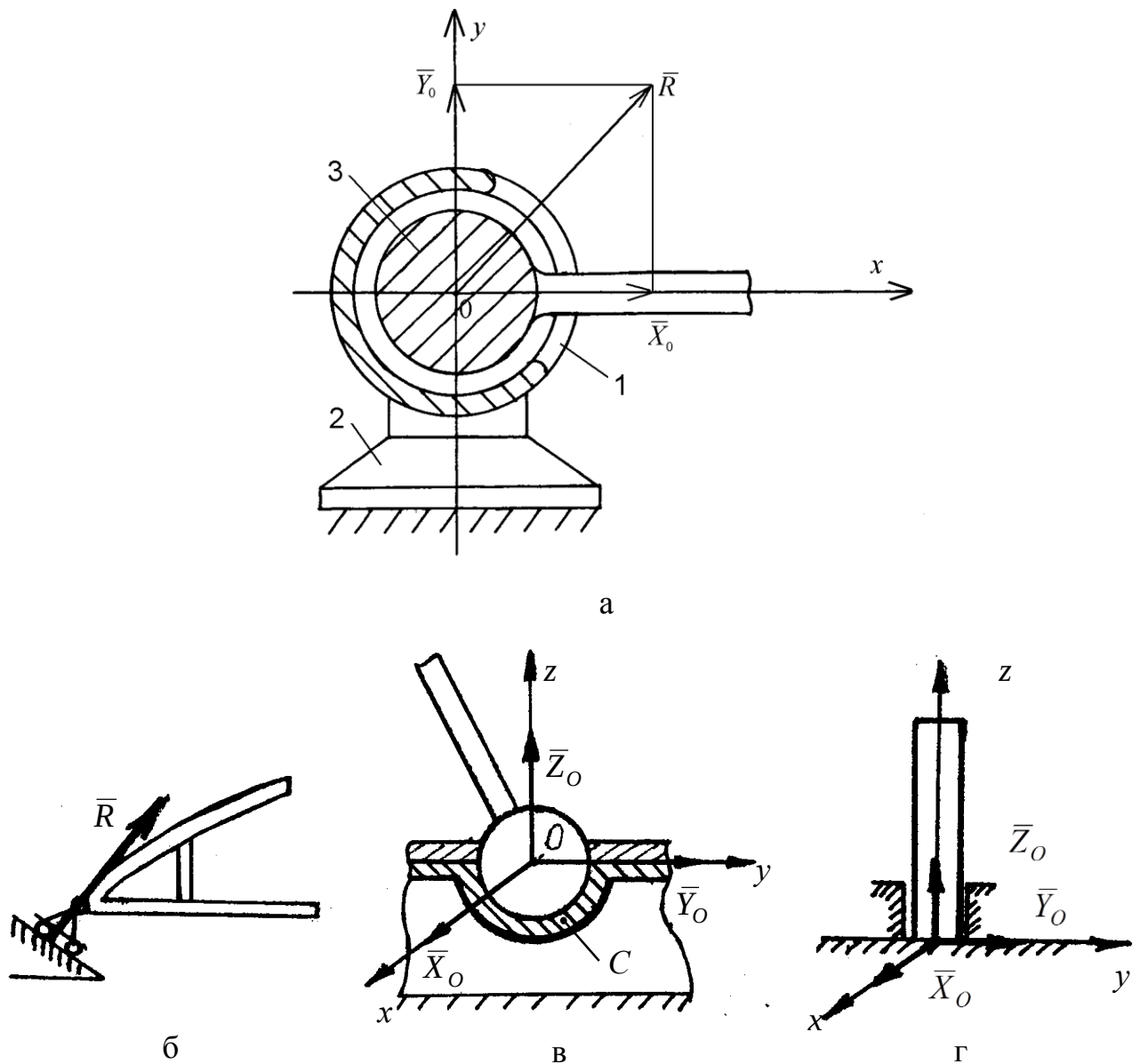


Рис. 2.3

Сферичний шарнір. У випадку сферичного шарніра тіло, яке з'єднане з обоймою C , має змогу обертатися навколо центру шарніра в будь-якому напрямі (рис. 2.3,в). Реакцію сферичного шарніра виражають трьома координатними складовими $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{Z}_O$ у трьох взаємно перпендикулярних напрямках:

$$\bar{R} = \bar{X}_O + \bar{Y}_O + \bar{Z}_O; R = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2 + Z_O^2}. \quad (2.2)$$

Підп'ятник. Якщо циліндричний шарнір перешкоджає переміщенню вала вздовж осі z вниз, то такий циліндричний шарнір називають підп'ятником. Опорна реакція підп'ятника має три координатні складові $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{Z}_O$ (рис. 2.3, г):

$$\bar{R} = \bar{X}_O + \bar{Y}_O + \bar{Z}_O; R = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2 + Z_O^2}. \quad (2.3)$$

Ідеальний стержень. Так називається невагомий стержень AB , закріплений двома ідеальними шарнірами на його кінцях (рис. 2.4). Такий стержень працює тільки на розтяг або стиск.

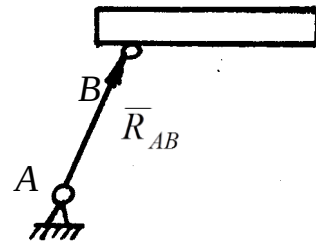


Рис. 2.4

Реакція $\bar{R}_{AB}$ ідеального стержня напрямлена по осі стержня. Якщо стержень розтягнутий, то реакція спрямована від тіла до стержня; якщо стержень стиснутий – то по стержню (рис. 2.4) від нього до тіла.

Жорстке заземлення. Балка AB кінцем A жорстко закріплена в стіні, а другий її кінець вільний (рис. 2.5). Якщо на балку діє задана сила $\bar{F}$, то в заземленні виникають реакції $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ і пара сил з моментом M_A .

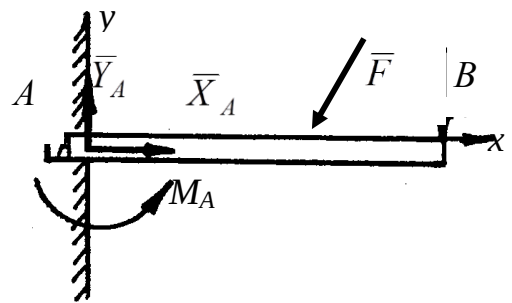


Рис. 2.5

Опора з тертям. У цьому випадку реакцію опори $\bar{R}$ розкладають на дві складові (рис. 2.6): силу $\bar{R}_n$, нормальну до поверхні опори, і силу $\bar{R}_t$, дотичну до поверхні опори (силу тертя):

$$\bar{R} = \bar{R}_n + \bar{R}_t;$$

$$R = \sqrt{R_n^2 + R_t^2}. \quad (2.4)$$

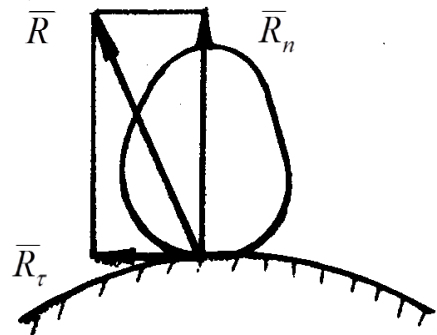


Рис. 2.6