

ПЗ7 Проекціювання прямої і точки

1. Сутність методу проекціювання

Проекція - це зображення предмета, "відкинуте" на площину за допомогою променів. Спроекціювати предмет — це означає зобразити його на площині (рис.1).

Залежно від положення проекціюючих променів проекції поділяють на центральні та паралельні.

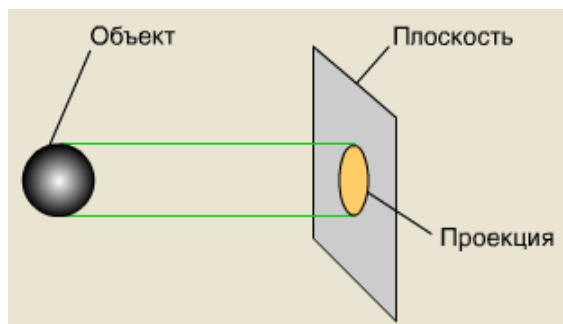


Рис. 1

Ідею центрального проекціювання видно з рис.2. Точка S , з якої виходять проекціюючі промені, називається центром проекціювання. Площина π_1 на яку проекціюється предмет, називається площиною проекцій. Площина π_1 і точка S становлять апарат центральної проекції. Щоб спроекціювати трикутник, треба з центра проекцій S через усі його вершини провести проекціюючі промені до перетину з площиною проекцій π_1 . Одержимо точки $A_1B_1C_1$, які називаються центральними проекціями вершин A, B, C на площину π_1 , а трикутник $A_1B_1C_1$ - центральною проекцією трикутника ABC .

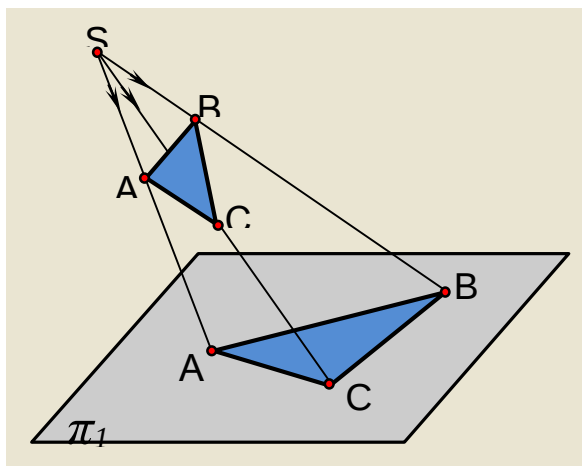


Рис. 2

Метод паралельного проєкціювання розглянемо за допомогою рис. 3. Як і в попередньому випадку, вибирають площину проєкцій π_1 . Замість центра проєкцій S задають напрям проєкціювання s , тобто вважають, що центр проєкцій S віддалений у нескінченність. Тому проєкціюючі промені паралельні між собою. Площина π_1 і напрям s становлять апарат паралельної проєкції. Щоб спроекціювати трикутник ABC на площину π_1 , через вершини A, B, C проводять проєкціюючі промені паралельно напрямку проєкціювання s . Внаслідок перетину цих променів з площиною π_1 утворюється трикутник $A_1B_1C_1$, який являє собою паралельну проєкцію трикутника ABC .

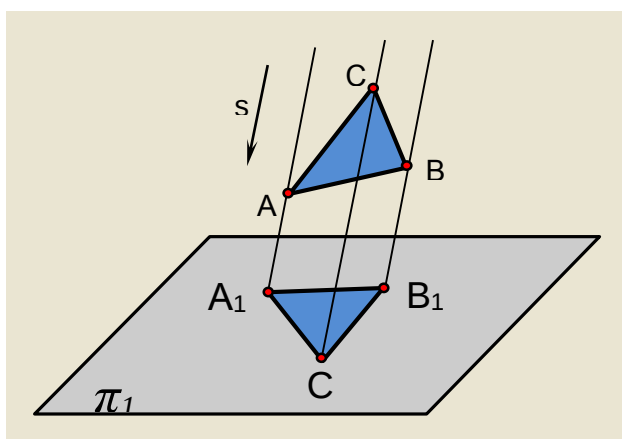


Рис. 3

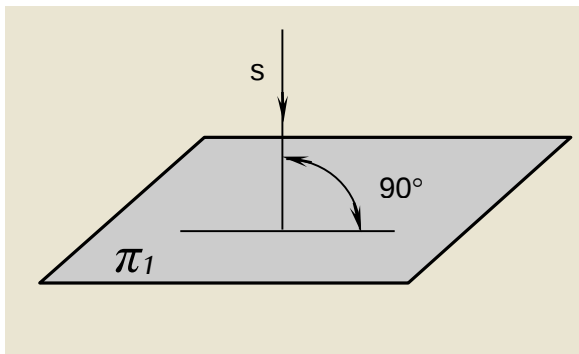


Рис. 4

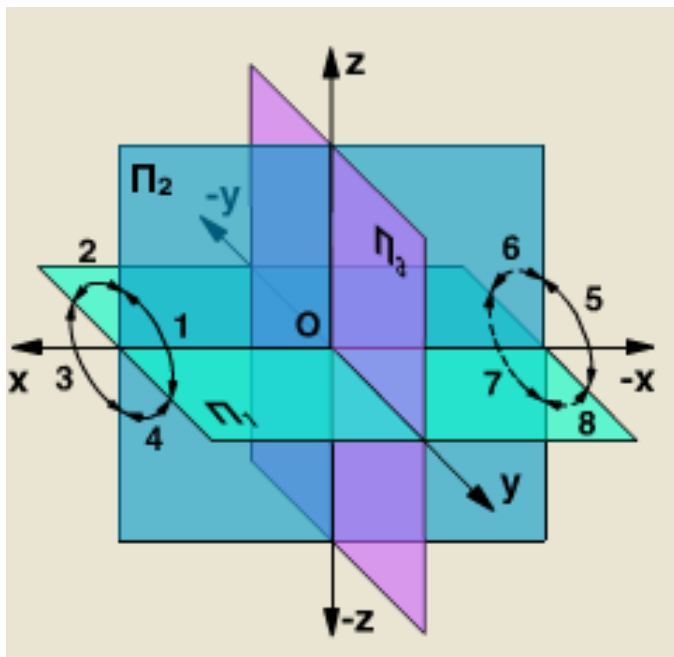


Рис. 5

Паралельні проекції поділяють на прямокутні і косокутні. Якщо проєкціюючі промені перпендикулярні до площини проєкцій (рис. 4), то таке проєкціювання називають прямокутним, а проєкції, які при цьому одержують — прямокутними, або ортогональними. Якщо ж кут нахилу променів не дорівнює 90° , то такі паралельні проєкції називаються косокутними. У кресленні користуються прямокутними проєкціями.

Ортогональне проєкціювання має ряд переваг перед центральним та косокутним паралельним проєкціюванням:

- простоту геометричних побудов ортогональних проєкцій предметів;

– зберігання на проєкціях, при певних умовах, форми та величини лінійних та кутових розмірів проєкціюючих предметів.

2. Побудова за заданими координатами епюрів прямих, взаємного положення прямих та прямих і точок.

Розглянемо просторову модель координатної площини проєкцій. Для визначення положення геометричної фігури в просторі і виявлення її форми по ортогональних проєкціях найбільш зручною є декартова система координат. Декартова система координат складається з трьох взаємно перпендикулярних площин.

π_1 – горизонтальна площина проєкцій;

π_2 – фронтальна площина проєкцій;

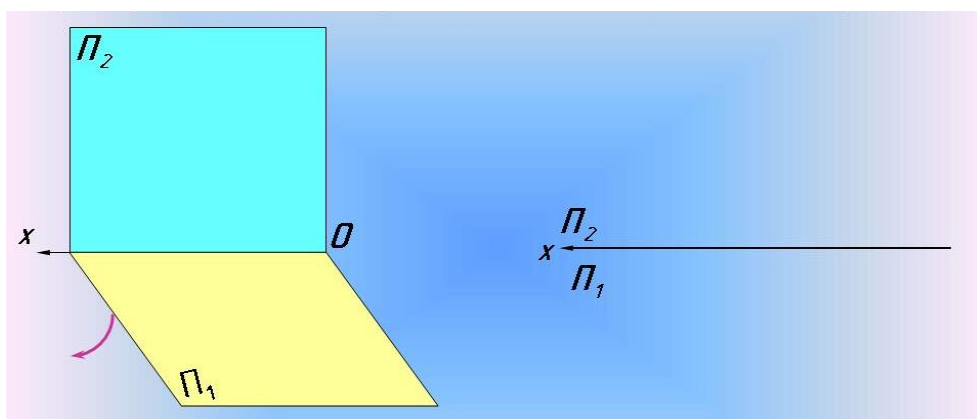
π_3 – профільна площина проєкцій.

Лінії перетину площин проєкцій утворюють осі координат: X - вісь абсцис, Y - вісь ординат, Z - вісь аплікату, а точка перетину координатних осей O береться за початок координат.

Точка в системі двох площин проєкцій

**Просторова
картина**

**Комплексне
креслення**



π_1 – горизонтальна площина проєкцій; π_2 – фронтальна площина проєкцій;

Площини проекцій перетинаються по вісі координат Ox . Обертанням навколо вісі Ox площину π_1 суміщають з площиною π_2 . Отримаємо комплексне креслення

Схему побудови зворотного ортогонального креслення розвинув Гаспар Монж – знаменитий французький учений. По схемі Монжа оригінал (наприклад точка) проєкціюється ортогонально на дві взаємно перпендикулярні площини проєкції π_1 - горизонтальну і π_2 - фронтальну площини проєкцій.

Лінія зв'язку - це пряма, що з'єднує дві проєкції точки на комплексному кресленні і перпендикулярна осі проєкцій.

У результаті ми отримали двохпроєкційне комплексне креслення точки A .

Твердження: Дві прямокутні проєкції точки повністю визначають її положення в просторі основних площин проєкцій.

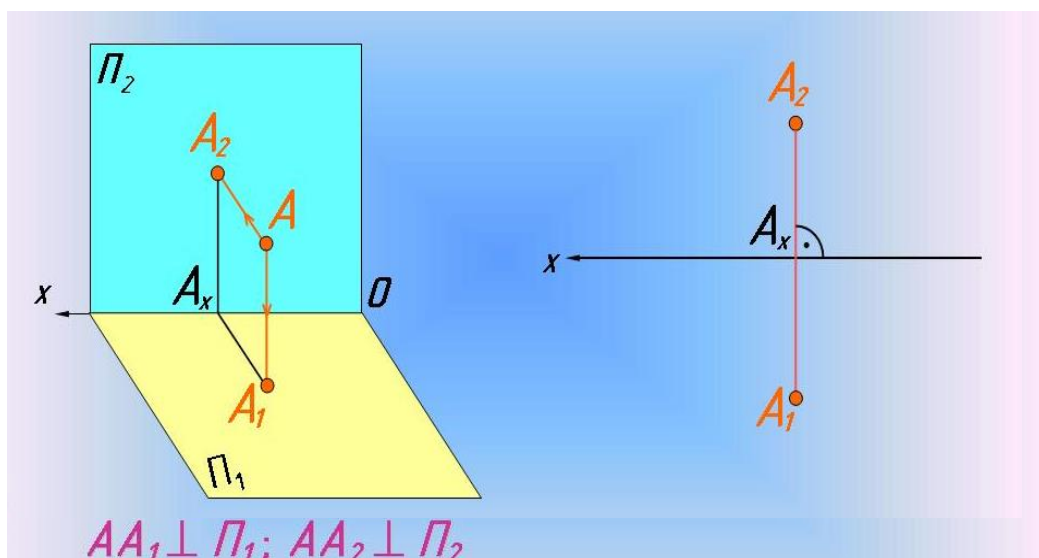
Тобто комплексне креслення або епюр Монжа (з фр. «креслення») – це зображення, яке отримуємо в результаті обертання площини проєкцій π_1 на кут 90° до суміщення π_2 .

В кресленні ж при побудові зображень часто користуються трьома проєкціями на три площини проєкцій. Розглянемо, за якими законами це реалізується.

Точка в системі двох площин проєкцій

Просторова картина

Комплексне креслення

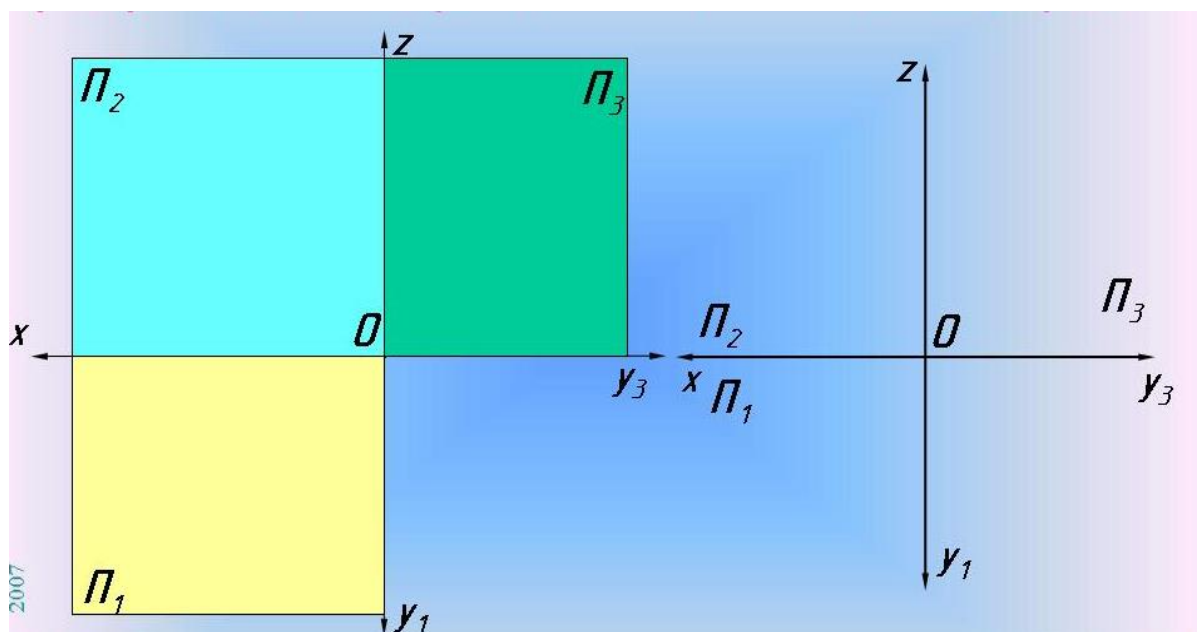


A_1 – горизонтальна та A_2 – фронтальна проекції точки A . Проекціюючі промені AA_1 та AA_2 перпендикулярні відповідним площинам проекцій. Точки перетину проекціюючої площини з віссю Ox позначена A_x . На комплексному кресленні горизонтальна A_1 та фронтальна A_2 проекції точки A з'єднуються вертикальною лінією проекційного зв'язку, яка $\perp$ вісі Ox .

Точка в системі трьох площин проекцій

Просторова картина

Комплексне креслення

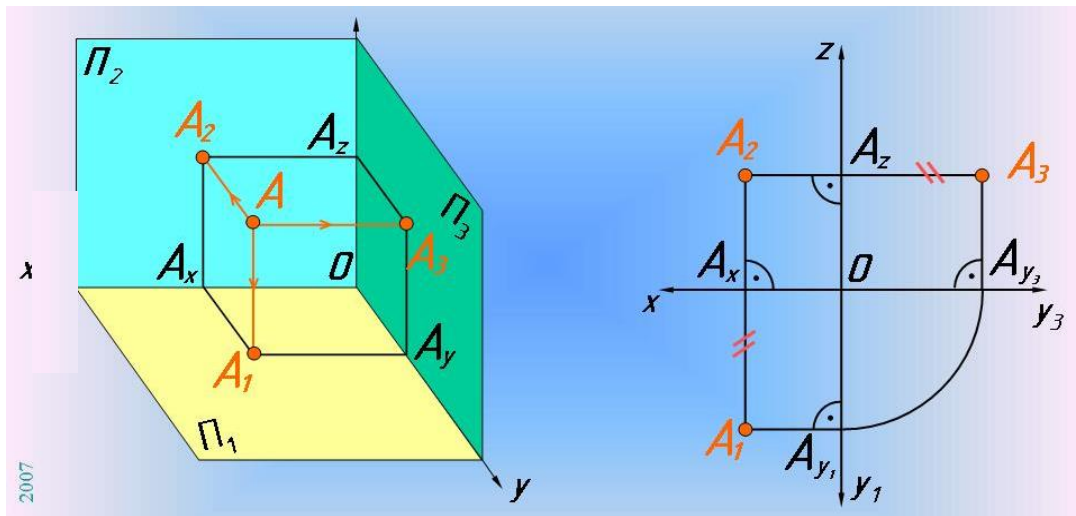


Для переходу до комплексного креслення просторову модель розрізають по вісі Oy та суміщають всі три площини проекцій в одну: π_1 обертають навколо вісі Ox , π_3 обертають навколо вісі Oz до їх спів падання з π_2 . Вісь Oy розпадається на дві вісі y_1 та y_3 .

Точка в системі трьох площин проєкцій

Просторова картина

Комплексне креслення



Проекціюючі промені AA_1 , AA_2 та AA_3 проводять перпендикулярно відповідним площинам проєкцій й отримують проєкції точки A : горизонтальну A_1 , фронтальну A_2 та профільну A_3 . Точки перетину проєкціюючих площин з відповідними осями позначені A_x , A_y , A_z .

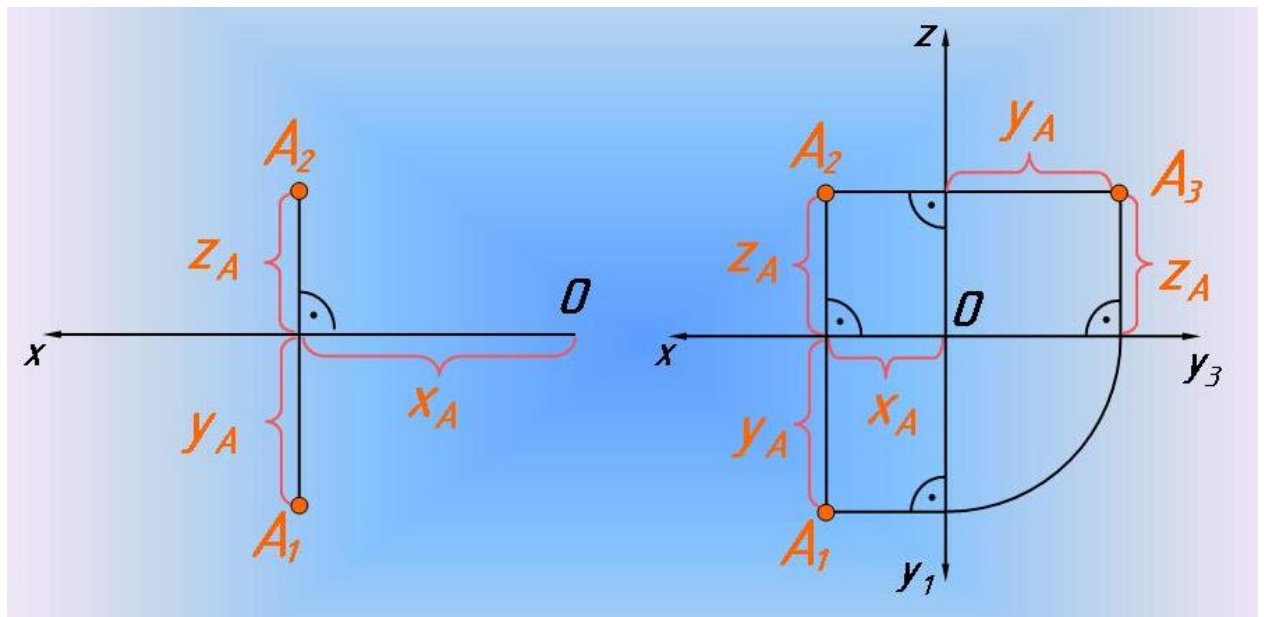
На комплексному кресленні лінії проєкційного зв'язку AA_1 , AA_2 та AA_3 проводять перпендикулярно відповідним площинам проєкцій й отримують проєкції точки A : горизонтальну A_1 , фронтальну A_2 та профільну A_3 . Точки перетину проєкціюючих площин з відповідними осями позначені A_x , A_y , A_z .

На комплексному кресленні лінії проєкційного зв'язку $\perp$ осям координат. Лінія $A_1A_2 \perp Ox$ розташована вертикально, а $A_2A_3 \perp Oz$ – горизонтально. При побудові лінії проєкційного зв'язку від A_1 до A_3 необхідно зберігати рівність координатних відрізків по осі Oy : $A_xA_1 = A_zA_3$

Для переходу до просторової моделі розрізають по вісі Oy та суміщають всі три площини проєкцій в одну: π_1 обертають навколо вісі π_3 обертають навколо вісі Oz до їх спів падання з π_2 . Вісь Oy розпадається на дві вісі y_1 та y_3

Перпендикуляр AA_1 називається горизонтально-проекціюючим, AA_2 - фронтально-проекціюючим і AA_3 - профільно-проекціюючим променем.

Прямокутні координати точок



На комплексному кресленні чисельні значення координат відкладаються вздовж відповідних координатних осей. Кожна проекція точки визначається двома координатами: горизонтальна – X_A та Y_A , фронтальна – X_A та Z_A , профільна – Y_A та Z_A .

Проекції однієї і тієї ж точки на комплексному кресленні розташовуються не довільно, а знаходяться в проекційному зв'язку, який полягає в наступному:

1. Фронтальна і горизонтальна проекції точки завжди знаходяться на одній вертикальній лінії зв'язку ($A_2 A_1 \perp OX$).
2. Фронтальна і профільна проекції точки завжди знаходяться на одній горизонтальній лінії зв'язку ($A_2 A_3 \perp OZ$).
3. Відстань профільної проекції точки від осі OZ дорівнює відстані горизонтальної проекції від осі OX ($|A_1 A_{12}| = |A_3 A_{23}|$).

Ортогональні проекції і система прямокутних координат

У просторі є безліч точок, що займають різне положення відносно площин проекцій Π_1 , Π_2 і Π_3 . В такому разі положення точки визначається дійсними величинами. Для цього в системі площин проекцій Π_1 , Π_2 , Π_3 розміщується така ж система прямокутних декартових координат. Початок координатних

осей суміщається з початком осей проекцій. Тепер положення кожної точки визначається трьома координатами - висотою, глибиною і широтою, які показують величини відстаней, на які точка віддалена від площин проекцій.

Висота точки (Z) визначає її відстань від площини проекцій $\Pi_1 - A A_1$ (на комплексному кресленні це відрізок $A_{12}A_2$).

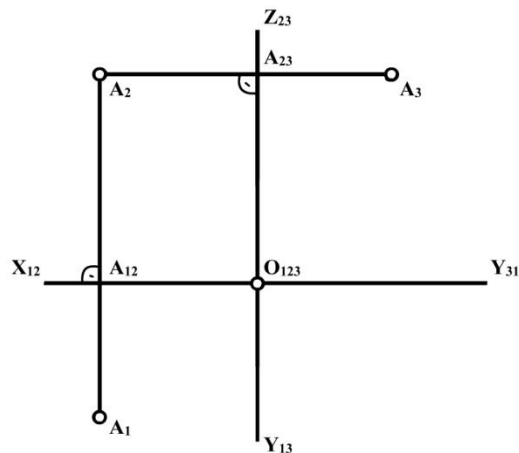
Глибина точки (Y) визначає її відстань від площини проекцій $\Pi_2 - A A_2$ (на комплексному кресленні це відрізок $A_{12}A_1$)

Широта точки (X) визначає її відстань від площини проекцій $\Pi_3 - A A_3$ (на комплексному кресленні це відрізок $A_{12}O_{123}$).

Між координатами точки та її ортогональними проекціями існує зв'язок:

- 1) координата X визначає положення вертикальної лінії зв'язку;
- 2) координата Y визначає положення горизонтальної проекції точки;
- 3) координата Z визначає положення фронтальної проекції точки.

Приклад: Побудувати три проекції точки $A(20; 18; 25)$



Основні властивості проектування точки при ортогональному проектуванні

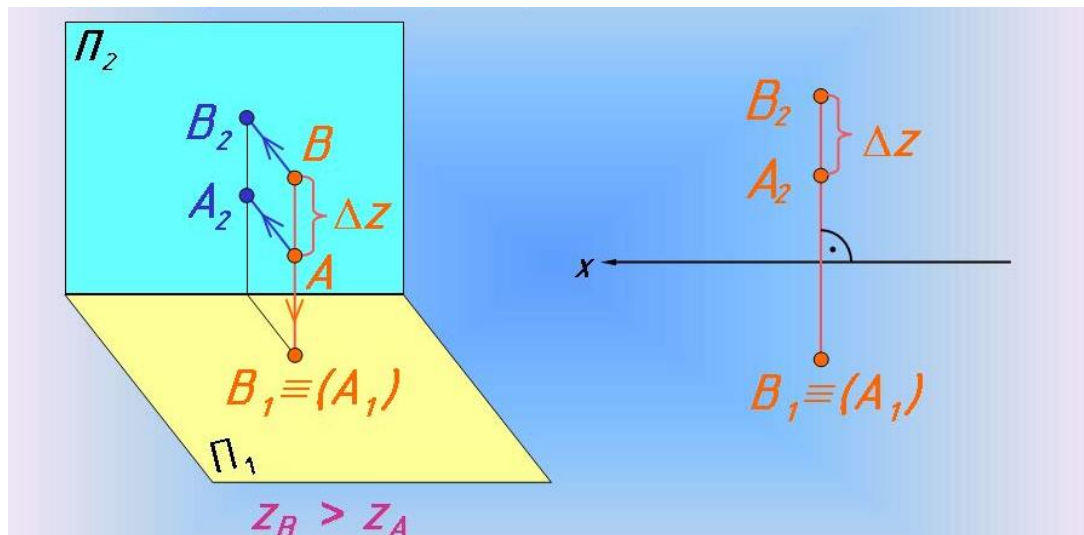
1. Положення крапки в просторі визначається трьома її координатами.
2. Горизонтальна проекція крапки визначається її абсцисою (X) і ординатою (Y).
3. Фронтальна проекція крапки - абсцисою (X) і аплікатою (Z).
4. Профільна проекція - ординатою (Y) аплікатою (Z).

Слідства:

1. Видалення точки від площин проекцій визначається:
 - о Координатою X - від площини Π_3 (проекція на Π_2 або Π_1);
 - о координатою Y - від площини Π_2 (проекція на Π_3 або Π_1);
 - о координатою Z - від площини Π_1 (проекція на Π_3 або Π_2);
2. Дві проекції точки лежать на одній лінії проекційного зв'язку:
 - о горизонтальна і фронтальна - перпендикулярно осі X ;
 - о горизонтальна і профільна - перпендикулярно осі Y ;
 - о фронтальна і профільна - перпендикулярно осі Z .

Конкуруючі точки

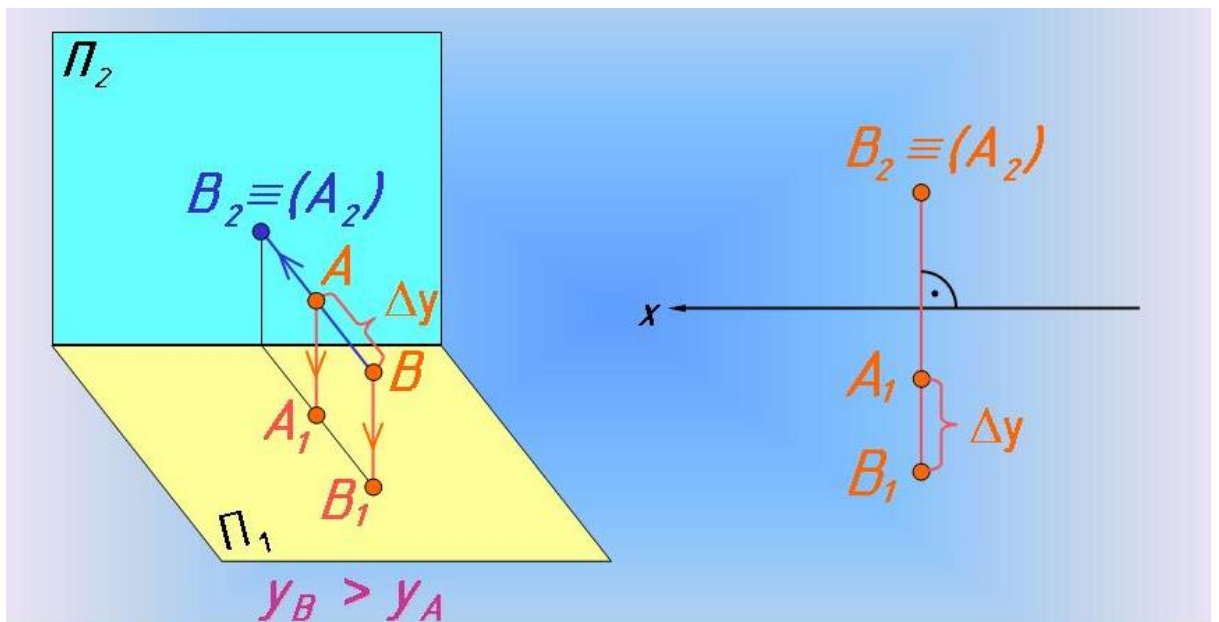
Конкуруючими називаються точки, які лежать на одному проекціюючому промені.



Горизонтально конкуруючі точки A та B лежать на одному горизонтально – проекціюючому промені, тому їх горизонтальні проекції співпадають. Точка B віща за точку A та розташована ближче до спостерігача, тому горизонтальна проекція B_1 буде видимою.

Конкуруючі точки

Видима та точка, координата у якої більша



Фронтально конкуруючі точки A та B відрізняються координатою y , лежать на одному фронтально – проєкціюючому промені, тому їх фронтальні проєкції співпадають. Близьче до спостерігача розташована точка B , тому її фронтальна проєкція B_2 буде видимою.

Правило конкуруючих точок:

- З двох конкуруючих точок в горизонтальній проєкції видима та, висота якої більша;
- З двох конкуруючих точок у фронтальній проєкції видима та, глибина якої більша;
- З двох конкуруючих точок у профільній проєкції видима та, широта якої більша.

Проекціювання прямої

До сих пір ми розглядали проекції точки, а зараз розглянемо комплексне креслення лінії. Пряма в просторі безмежна. Обмежена частина прямої називається відрізком.

По розташуванню відносно площин проекцій прямі можуть бути загального та частинного положень.

Прямою загального положення є пряма, яка не паралельна жодній з площин проекцій.

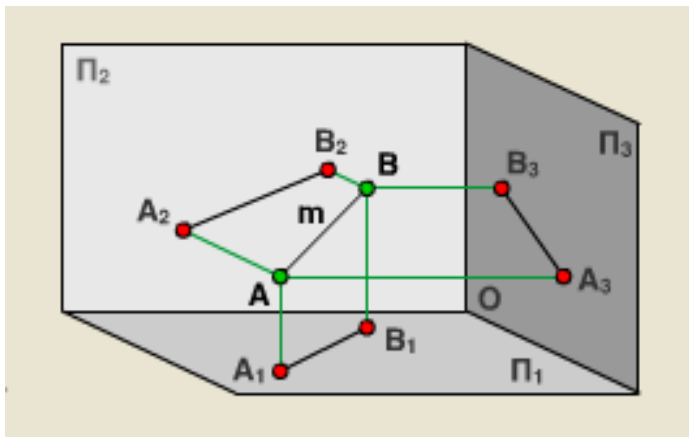


Рис. 12

Розглянемо схему побудови ортогонального креслення прямої лінії. Проекціювання прямої зводиться до побудови проекцій будь-яких двох її точок, так як дві точки повністю визначають положення прямої в просторі.

Наприклад візьмемо пряму m загального положення (рис. 12), яка задана двома точками A і B . Побудуємо ортогональні проекції відрізка AB на площинах π_1 , π_2 , π_3 . З'єднаємо проекції точок A і B на кожній площині отримаємо проекцію відрізка AB на всі три проекціюючі площини.

Комплексне креслення відрізка прямої AB загального положення на всі три площини проекції наведено на рис. 13.

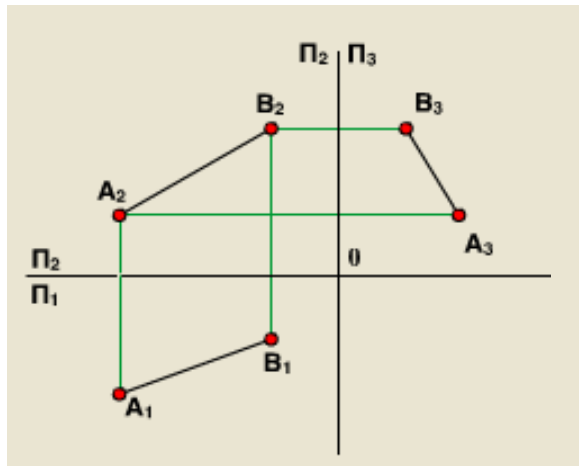


Рис. 13

Проекції прямої

Просторова картина

Комплексне креслення

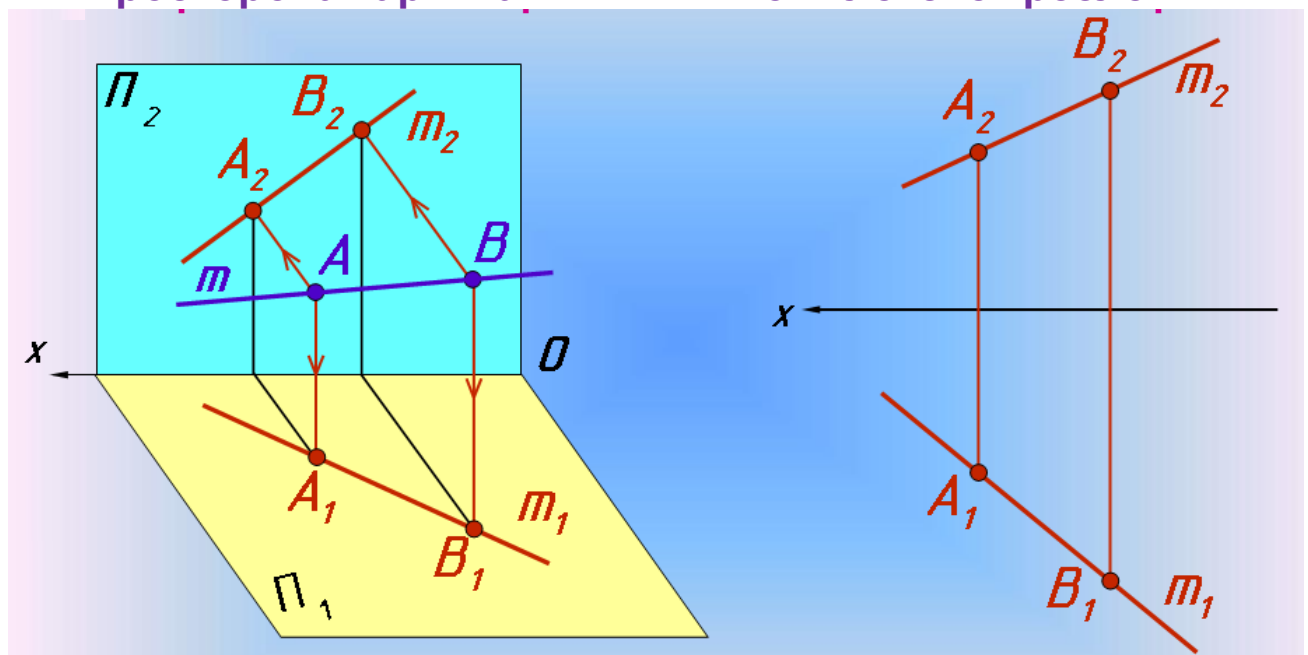


Рис. 14

Положення прямої m в просторі визначають дві довільні точки A та B , які лежать на цій прямій. Пряма лінія m є заданою, якщо на комплексному кресленні побудувати проекції двох її точок A та B . Проекції прямої m проходять через пари відповідних проекцій точок: горизонтальна проекція прямої m_1 – через A_1 та B_1 ; фронтальна проекція прямої m_2 – через A_2 та B_2

Окрім розглянутого загального випадку розміщення прямої по відношенню до заданої системи площин проєкцій, існують особливі (часткові) випадки:

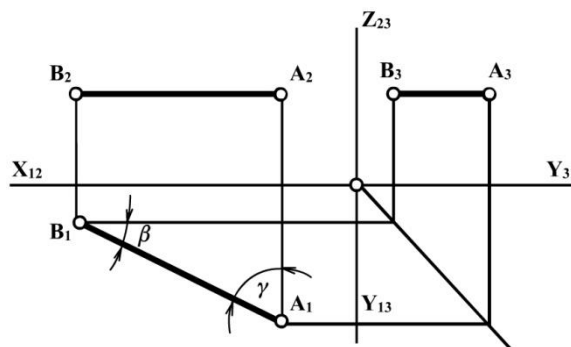
- а) пряма паралельна до площини проєкцій;
- б) пряма перпендикулярна до площини проєкцій.

Прямі, паралельні до площин проєкцій, називаються **лініями рівня**.

Горизонтальна пряма (горизонталь) - це пряма, паралельна до горизонтальної площини проєкцій. Вона позначається буквою **h** (h_1, h_2, h_3) (на рис. 15 відрізок АВ паралельний до Π_1). Усі точки горизонталі віддалені на однакові відстані від Π_1 , тобто для усіх точок горизонталі координата Z - величина постійна ($Z = \text{const}$). А тому $\mathbf{h}_2 // \mathbf{X}_{12}$ ($\mathbf{h}_2 \perp \mathbf{Z}_{23}$, $\mathbf{h}_3 \perp \mathbf{Z}_{23}$).

Кут нахилу горизонталі до Π_1 - $\alpha = 0$. Кут нахилу горизонталі до Π_2 - β і кут нахилу до Π_3 - γ визначаються з горизонтальної проєкції **h** - $h_1(A_1 B_1)$ (рис. 15).

На площину проєкцій Π_1 відрізки прямої **h** проєктуються в натуральну величину, а на дві інші площини - зі спотворенням - у вигляді відрізків меншої величини.



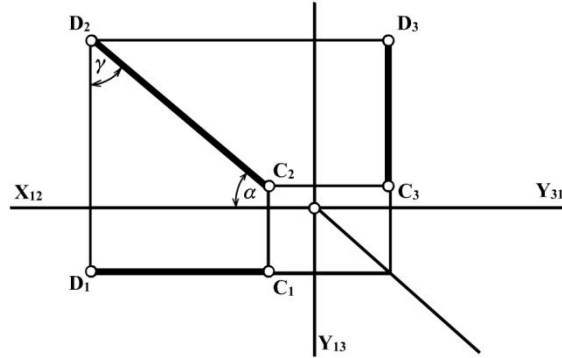
$$\mathbf{h} // \Pi_1: \alpha = 0 \Rightarrow \Pi_1; \beta \Rightarrow \Pi_2; \gamma \Rightarrow \Pi_3$$

Рис. 15

Фронтальна пряма (фронталь) - це пряма, паралельна до фронтальної площини проєкцій. Вона позначається буквою **f** (f_1, f_2, f_3) (на рис. 2.6 відрізок CD паралельний до Π_2). Усі точки фронталі віддалені на однакові відстані від Π_2 , тобто для усіх точок фронталі координата Y - величина постійна ($Y = \text{const}$). А тому $\mathbf{f}_1 // \mathbf{X}_{12}$ ($\mathbf{f}_1 \perp \mathbf{Y}_{13}$, $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{Y}_{31}$).

Кут нахилу фронталі до Π_2 - $\beta = 0$. Кут нахилу фронталі до Π_1 - α і кут нахилу до Π_3 - γ визначаються з фронтальної проекції $f - f_2 (C_2D_2)$ (рис. 16)

На площину Π_2 відрізки прямої f проектується в натуральну величину, а на дві інші площини - зі спотворенням - у вигляді відрізків меншої величини.



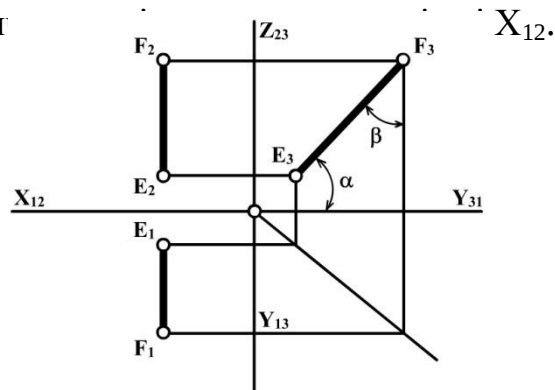
$$f // \Pi_2: \alpha \Rightarrow \Pi_1; \beta = 0 \Rightarrow \Pi_2; \gamma \Rightarrow \Pi_3$$

Рис. 16

Профільна пряма - це пряма, паралельна до профільної площини проекцій. Вона позначається буквою p (p_1, p_2, p_3) (на рис. 2.7 відрізок EF паралельний до Π_3). Усі точки профільної прямої віддалені на однакові відстані від Π_3 , тобто для усіх точок профільної прямої координата X - величина постійна ($X = \text{const}$). А тому $p_1 \perp X_{12}$, $p_2 \perp X_{12}$ ($p_1 // Y_{13}$, $p_2 // Z_{23}$).

Кут нахилу профільної прямої до Π_3 - $\gamma = 0$. Кут нахилу профільної прямої до Π_1 - α і кут нахилу до Π_2 - β визначаються з профільної проекції $p - p_3 (E_3F_3)$ (рис. 17).

На профільну площину проекцій Π_3 відрізки прямої p проектується в натуральну величину, а на дві інші площини - зі спотворенням - у вигляді відрізків меншої величини.



$$p // \Pi_3: \alpha \Rightarrow \Pi_1; \beta \Rightarrow \Pi_2; \gamma = 0 \Rightarrow \Pi_3$$

Рис. 17.

Проекціюючими називаються прямі, перпендикулярні до однієї з площин проекцій, тобто паралельні двом іншим площинам.

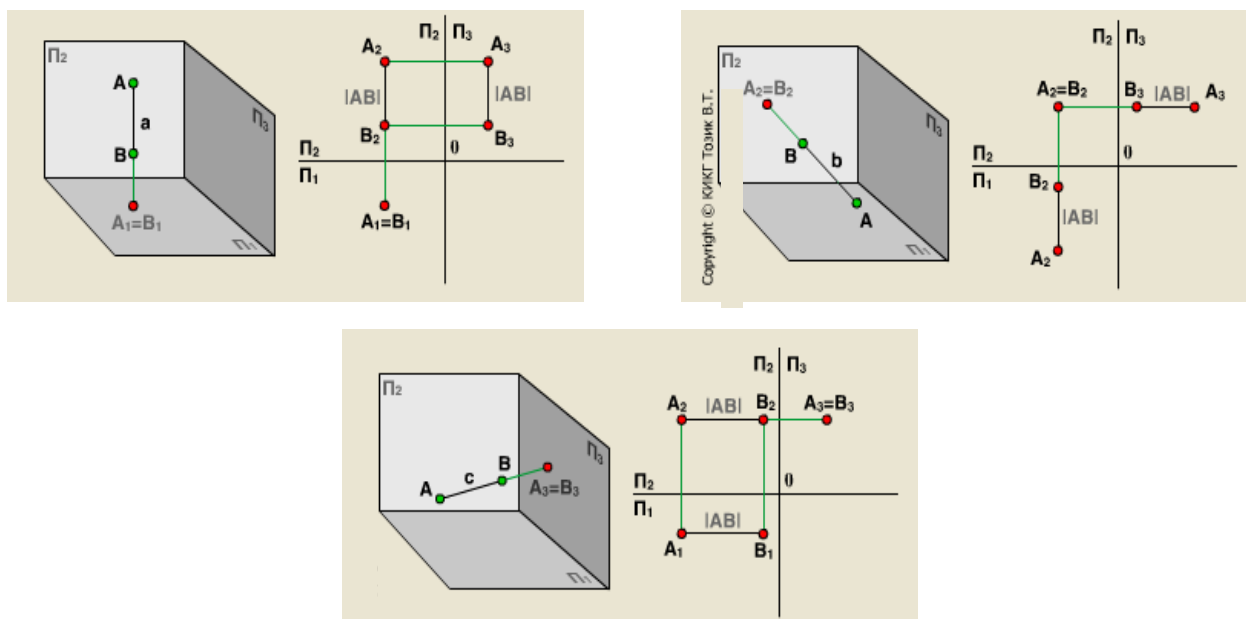


Рис. 18

Побудова слідів прямої

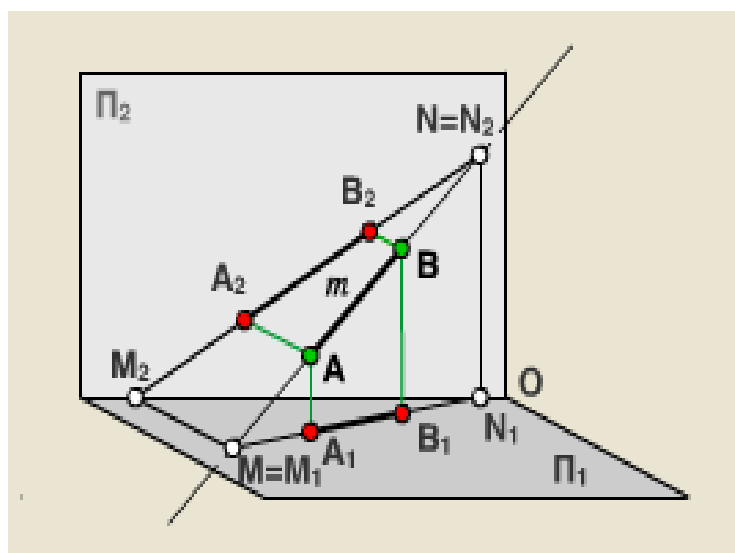


Рис. 19

Якщо відрізок AB загального положення (рис. 19) продовжити в обидва боки від точок A і B , то в точках M і N він перетне площини проекцій π_1 і π_2 .

Пряма, яка паралельна якій-небудь площині проєкцій, не може мати сліду на тій площині, якій вона паралельна, так як вона з нею не перетинається.

Сліди прямої

Просторова картина

Комплексне креслення

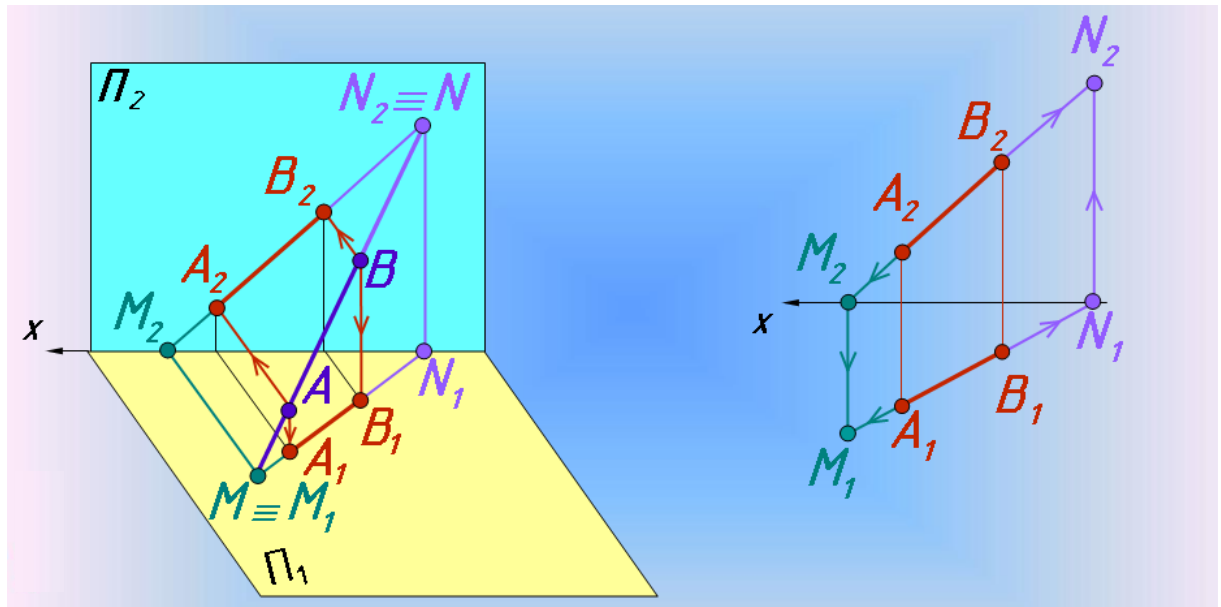


Рис. 20

Слід прямої – це точка перетину прямої з відповідною площиною проєкцій. Точка M — горизонтальний слід прямої AB , вона має аплікату $z_M = 0$, а точка N - фронтальний слід прямої AB , вона має аплікату $y_N = 0$.

Для побудови горизонтального сліду прямої AB знайдемо на ній точку M з координатою $z = 0$, перетин фронтальної проєкції прямої A_2B_2 з віссю x визначає фронтальну проєкцію сліду M_2 . Горизонтальна проєкція сліду M_1 належить горизонтальній проєкції прямої.

Для побудови фронтального сліду прямої AB знайдемо на ній точку N з координатою $y = 0$, перетин горизонтальної проєкції прямої A_1B_1 з віссю x визначає горизонтальну проєкцію сліду N_1 . Фронтальна проєкція сліду N_2 належить фронтальній проєкції прямої.

Визначення натуральної величини відрізка прямої і кутів його нахилу до площин проекцій

Пряма загального положення нахилена під різними кутами до площин проекцій, а тому проекції відрізка прямої різні за величиною і важливо уміти знаходити натуральну величину відрізка прямої за його проекціями.

Розглянемо проекції відрізка АВ на дві площини Π_1 і Π_2 . Якщо через точку А провести пряму АВ₀, яка паралельна А₁В₁, то отримаємо прямокутний трикутник АВВ₀ у якого: АВ - гіпотенуза - натуральна величина (рис.21).

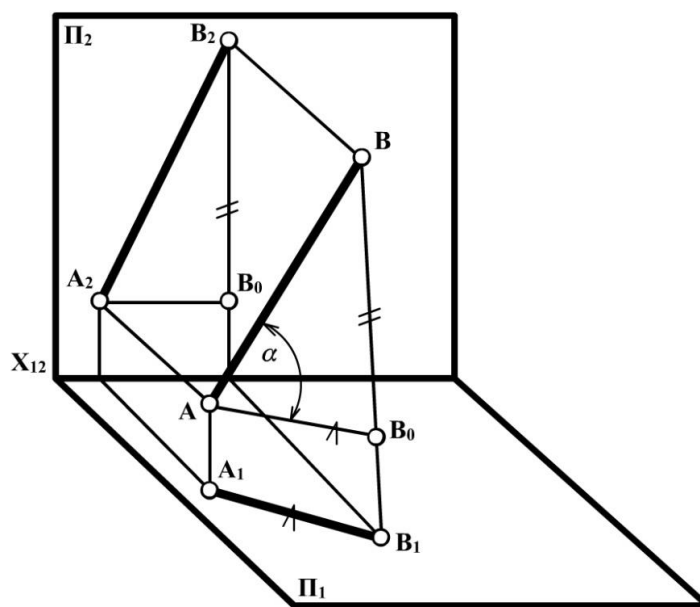


Рис. 21

Оскільки $AB_0 \parallel A_1B_1$; $AB_0 \perp BB_1$, $\Rightarrow |A_1B_1| = |AB_0|$ - катет АВ₀ дорівнює горизонтальній проекції відрізка АВ.

Другий катет ВВ₀ дорівнює різниці висот між точками В і А: $|BB_0| = Z_B - Z_A$.

α - кут між гіпотенузою і катетом АВ₀, тобто між відрізком АВ і його проекцією на Π_1 є кутом нахилу відрізка прямої АВ до площини проекцій Π_1 .

Такий трикутник можна штучно відтворити на комплексному кресленні (рис. 2.18). Горизонтальна проекція А₁В₁ буде виконувати функцію катета. Другий катет, величина якого дорівнює $Z_B - Z_A$, будемо, взявши за вершину

прямого кута точку A_1 (слід зауважити, що за вершину прямого кута може бути взятий будь який кінець проекції відрізка).

Натуральна величина відрізка прямої загального положення на комплексному кресленні будується як гіпотенуза прямокутного трикутника, перший катет якого дорівнює одній з проекцій даного відрізка, а другий - різниці відстаней від кінців відрізка, до тієї площини проекцій, на якій взято перший катет (різниці відстаней кінців другої його проекції від площини, на якій знаходиться перша проекція цього відрізка).

Кут нахилу відрізка прямої до площини проекцій визначається як кут між натуральною величиною відрізка і його проекцією на цю площину.

На рисунку 22 показано визначення натуральної величини відрізка АВ і кутів його нахилу до площин проекцій: α - до Π_1 ; β - до Π_2 ; γ - до Π_3 .

Для визначення натуральної величини відрізка АВ і кута α необхідно :

1. Через одну з точок горизонтальної проекції відрізка (у нас точка A_1) провести перпендикуляр до проекції відрізка і на ньому відкласти різницю висот між точками В і А.

2. Точку A_0 , яку ми отримали, з'єднуємо з точкою B_1 . Відрізок A_0B_1 буде натуральною величиною відрізка АВ, а кут між A_1B_1 і A_0B_1 буде кутом α нахилу відрізка АВ до площини проекцій Π_1 .

Для визначення натуральної величини відрізка АВ і кута β необхідно:

1. Через точку A_2 або B_2 (у нас A_2) провести перпендикуляр до A_2B_2 і на ньому відкласти різницю глибин між точками А і В.

2. Точку A_0 , яку ми отримали, з'єднуємо з точкою B_2 . Відрізок A_0B_2 буде натуральною величиною відрізка АВ, а кут між A_2B_2 і A_0B_2 буде кутом β нахилу відрізка АВ до площини Π_2 .

Для визначення натуральної величини відрізка АВ і кута нахилу його до Π_3 необхідно:

1. Через точку A_3 або B_3 (у нас A_3) провести перпендикуляр до A_3B_3 і на ньому відкласти різницю широт між точками A і B .

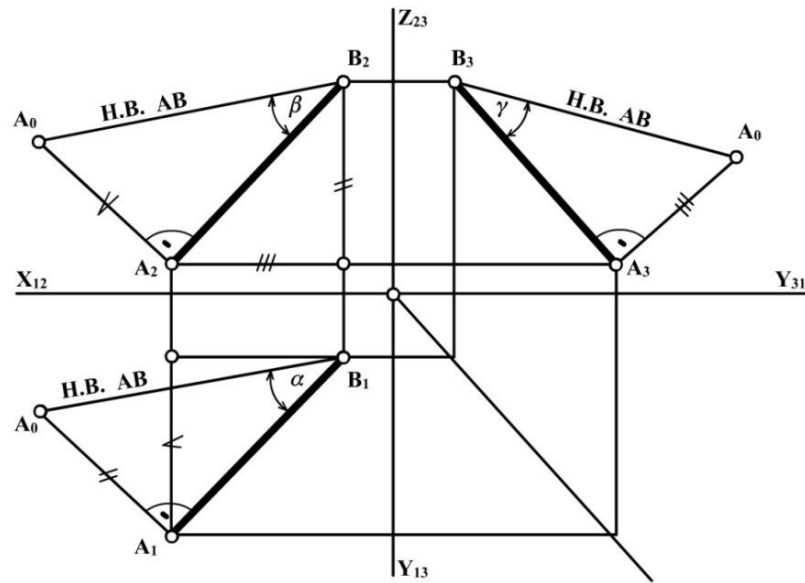


Рис. 22

2. Точку A_0 , яку ми отримали, з'єднуємо з точкою B_3 . Відрізок A_0B_3 буде натуральною величиною відрізка AB , а кут між A_3B_3 і A_0B_3 буде кутом γ - кутом нахилу відрізка AB до площини проєкцій Π_3 .

Взаємне положення двох прямих

Дві прямі в просторі одна відносно другої можуть бути взаємно паралельними, перетинатися і бути мимобіжними.

Паралельні прямі. Якщо прямі в просторі паралельні, то їх однойменні проєкції на будь-яку площину також взаємно паралельні (рис. 23).

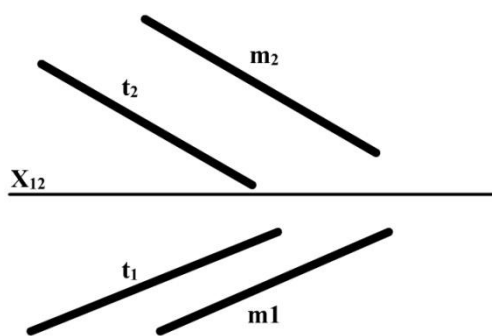


Рис. 23

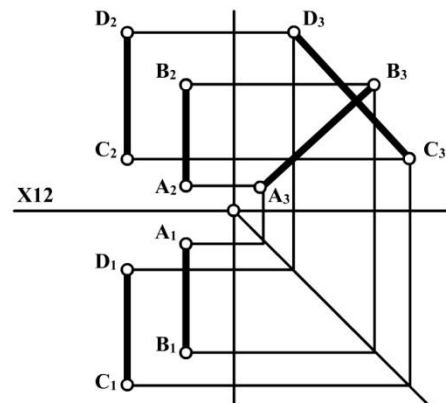


Рис. 24

Паралельність однойменних проєкцій прямих не завжди може бути ознакою паралельності прямих у просторі. Так, прямі AB і CD є мимобіжними: $AB \parallel \Pi_3$; $CD \parallel \Pi_3$. $A_2B_2 \parallel C_2D_2$, $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, $A_3B_3 \nparallel C_3D_3$: $AB \nparallel CD$ (рис. 24).

Прямі, що перетинаються. Якщо прямі в просторі перетинаються, то на комплексному кресленні їх однойменні проєкції перетинаються в точках K_1 і K_2 , розташованих на одній лінії зв'язку (рис. 25).

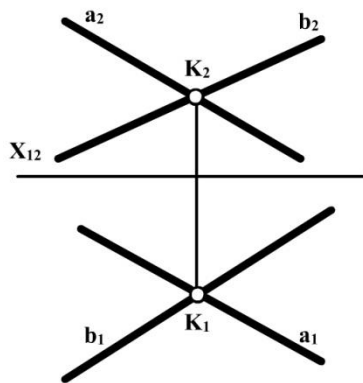


Рис. 25

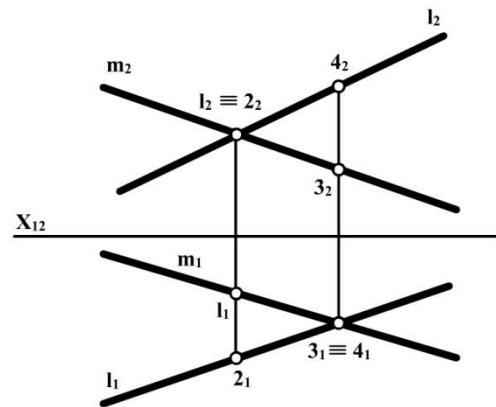


Рис. 26

Мимобіжні прямі. Прямі, які в просторі не паралельні між собою і не перетинаються називаються мимобіжними. Точки перетину однойменних проєкцій цих прямих не лежать на одній лінії проєкційного зв'язку (рис. 26).