***Тема: Первісна. Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця основних інтегралів. Метод безпосереднього інтегрування. Інтегрування функцій заміною змінної та за частинами***

***1.1.* *Первісна функція. Невизначений інтеграл.***

Основна задача диференціального числення є знаходження похідної та диференціала заданої функції. Інтегральне числення розв′язує обернену задачу: за даною похідною або диференціалом невідомої функції, знайти саму функцію. Іншими словами, маючи вираз  або , де  відома функція, потрібно знайти саму функцію , яка називається первісною для функції .

Означення**.** Функція називається первісною для функції  на даному проміжку, якщо на цьому проміжку похідна , а диференціал .

Наприклад, однією із первісних функцій для функції  є функція , бо . Очевидно, що первісна функція не єдина, тому що  або . Отже дві первісні для функції  відрізняються сталими доданками. Якщо  деяка первісна функція для функції , то формула , де , виражає всю сукупність первісних для  функцій.

Надалі будемо вважати, що функція визначена і неперервна на деякому скінченому або нескінченому проміжку.

Означення**.** Загальний вираз усіх первісних для даної неперервної функції  називається невизначеним інтегралом від функції  або від диференціального виразу  і позначається символом

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

де--називається підінтегральною функцією, а-- підінтегральним виразом. Геометрично невизначений інтеграл  представляє собою сімейство паралельних кривих.

***1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла***

І. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.2) |



ІІ. Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференційованої функції  дорівнює самій цій функції з точністю до сталого доданку, тобто

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.3) |

ІІІ. Сталий множник можна винести за знак інтеграла, тобто

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.4) |

IV. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа неперервних функцій дорівнює такій же сумі невизначених інтегралів від цих функцій, тобто, якщо функції ,  , -- неперервні на інтервалі (*а; b*) , то

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.5) |

V. Якщо



і - довільна функція, що має неперервну похідну, то

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.6) |

Ця властивість, яку називають інваріантністю (незмінністю) формули інтегрування, означає, що та чи інша формула невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну.

***1.3. Таблиця основних невизначених інтегралів***

Виходячи з того, що інтегрування є оберненою операцією щодо операції диференціювання, наведемо основні табличні інтеграли за умови, що  - довільна функція, яка має на деякому проміжку неперервну похідну, використавши при цьому таблицю похідних та формулу (1.6)

1. , 
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. ;
11. ;
12. ;
13. ;

# Покажемо на прикладах, що наведені табличні інтеграли будуть вірні, коли - незалежній змінній і коли - диференційовній функції від *x.*

Розглянемо інтеграл.

, при *т=*3.

Якщо  тоді з цієї формули випливає , тому що , або ;

## Нехай . Тоді ,

## або , тому що . Дійсно,

, а .

### Якщо , тоді ,

### або , тому що ,

, а .

Звідси випливає важливість вміння зводити диференціальний вираз  до виду

, де *u* – деяка функція *x* , а *g* – функція простіша для інтегрування ніж *f.*

Наведемо ряд перетворень диференціала, корисних при інтегруванні:

1) , де *b*- довільне дійсне число;

2) , де  - дійсне число;

3) , 

4) ;

5) ;

6) ;

Взагалі, для диференційовної функції , .

Користуючись наведеними перетвореннями диференціалів, знайдемо деякі невизначені інтеграли.







Тут використаний табличний інтеграл 2, з якого випливає важливе правило: *якщо під інтегралом чисельник дробу є похідною або диференціалом знаменника, то такий інтеграл дорівнює ln знаменника.*

***1.4. Основні методи інтегрування***

Диференціальне числення з допомогою таблиці похідних та правил диференціювання дозволяє знайти похідну довільної диференційовної функції. Операція інтегрування значно складніша. Вона передбачає, якщо це можливо, зведення невизначеного інтеграла тим чи іншим способом до табличного інтеграла і одержання таким чином шуканого результату. Розглянемо деякі методи і способи інтегрування, а саме: метод розкладу або безпосереднього інтегрування, метод підстановки або заміни змінної і метод інтегрування частинами.

1. *Метод розкладу або безпосереднього інтегрування.*

Він полягає у тому, що шляхом виконання вказаних дій і певних перетворень підінтегральна функція зводиться до суми таких функцій, від яких інтеграли беруться безпосередньо за допомогою табличних.

Приклад 1.

;

*Зауваження.* Нема потреби після кожного доданку ставити довільну сталу, тому що сума довільних сталих є також стала, яку і записують в кінці.

Приклад2. 

;

Приклад 3.

;

Приклад 4.



1. *Метод підстановки або заміни змінної.*

Суть цього методу полягає в тому, щоб введенням нової змінної (через підстановку) звести вихідний інтеграл до простішого або табличного інтегралу.

Нехай  неперервна на інтервалі  функція, а  - неперервно диференційовна на інтервалі , причому функція  відображає інтервал  в інтервал . На основі незалежності невизначеного інтеграла від вибору аргументу, та враховуючи, що , одержимо формулу заміни змінної в невизначеному інтегралі

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.7) |

Іноді формулу (1.7) корисно застосовувати справа наліво

 або

|  |  |
| --- | --- |
| , де | (1.8) |

Якщо підстановка виявилась вдалою, то інтеграл у правій частині (1.7) або ( 1.8) буде простішим або табличним. Після його знаходження потрібно перейти до старої змінної.

Зауважимо, що загального правила вибору підстановок не існує. Тут важливу роль відіграє інтуїція і практика. Як це робити, покажемо на конкретних прикладах.

Приклад 1.

=

=



=;

Із цього прикладу видно, як дві різні підстановки приводять до інтегралів різної складності але з однаковим кінцевим результатом.

Приклад 2. Знайти інтеграл.

;

Приклад 3. Знайти інтеграл.

;

Приклад 4. Знайти інтеграл.



Тут використана заміна  і формула 11 табличних інтегралів.

1. *Метод інтегрування частинами.*

Нехай  і - неперервно диференційовні функції на деякому проміжку. На основі формули диференціала добутку двох функцій маємо

, або .

В результаті інтегрування останньої рівності, дістанемо:

|  |  |
| --- | --- |
| , або | (1.9) |

Формула (1.9) називається формулою інтегрування частинами. Вона показує, що інтеграл  зводиться до інтеграла , який може виявитися більш простим ніж вихідний або табличним. Найчастіше ця формула застосовується тоді, коли під інтегралом є добуток алгебраїчної і трансцендентної функцій, наприклад  або . Проблема тут пов’язана із вибором у вихідному інтегралі функцій, що позначаються через *u* і диференціальних виразів, які позначаються через . Тут потрібно керуватись такими вказівками :

По-перше, потрібно мати на увазі, що функція *и* диференціюється, а вираз - інтегрується. Звідси випливає, що через *и*  потрібно позначати трансцендентні функції, від яких інтеграли безпосередньо не беруться (), а через  ту частину підінтегрального виразу, від якого інтеграл відомий або може бути знайдений. Якщо ж підінтегральний вираз є добуток многочлена  на функції  тоді за *и* позначається многочлен, що приводить при диференціюванні до пониження його степеня. В результаті застосування формули (1.9) стільки разів, який порядок многочлена, можна знайти інтеграл. Для обчислення інтегралів виду  потрібно формулу (1.9) застосувати двічі. В результаті відносно шуканого інтеграла одержимо рівняння 1-го степеня. Розв’язавши його, знайдемо шуканий інтеграл.

Схематично правило вибору *u* і  можна подати у такому вигляді

; 

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1.



=  ;

Приклад 2.

;

тому,що; Приклад3.;

тому,що**.**

Ми одержали лінійне рівняння відносно . Звідси  або 