**Неперервні випадкові величини**

**Поняття неперервної випадкової величини і функції її розподілу.**

Випадкову величину називають неперервною випадковою величиною, якщо її множина можливих значень є проміжком, скінченим чи нескінченним.

Прикладом неперервної випадкової величини може бути річна кількість опадів у певній місцевості. Рівень опадів, що випали за один рік, є випадковою величиною, яка може набути будь-якого значення з деякого проміжку.

Нехай Х неперервна випадкова величина, а х – довільне дійсне число, і нехай є ймовірністю події, яка полягає в тому, що Х набуває значень, менших від Х. Функцію

називають функцією розподілу неперервної випадкової величини.

Зазначимо, що функція розподілу так само означається для дискретних випадкових величин.

Функція розподілу має такі властивості:

1. Для будь-якого

Правильність цієї властивості випливає з того, що –це ймовірність.

2.Функція є неспадною: якщо

3.Ймовірність того, що випадкова величина Х набуде значення, яке належить скінченному проміжку дорівнює різниці між значеннями функції розподілу цієї випадкової величини в правому і лівому кінцях проміжку :

**Приклад 1.** Випадкову величину Х задано функцією розподілу Знайти ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина Х набуде значення, яке належить проміжку .

18

Розв’язок

Відповідь:

Властивості 1 – 3 стосуються як неперервних, так і дискретних випадкових величин. Наступна властивість та її наслідки стосуються лише неперервних випадкових величин.

Надалі випадкову величину Х називатимемо неперервною. Лише в тому випадку, коли функція її розподілу неперервна наR.

4.Ймовірність того, що неперервна випадкова величина Х набуде якого-небудь значення дорівнює нулю:

**Наслідок.** Для неперервної випадкової величини Х при будь-яких справджуються рівності

Дві наступні властивості стосуються як неперервних, так і дискретних випадкових величин.

5.Якщо множина можливих значень випадкової величини Х є підмножиною скінченного інтервалу то:

1) 2)

Справді, якщо то подія неможлива, тобто її ймовірність дорівнює нулю. Якщо ж то подія вірогідна й

6. Справедливими є такі рівності

**Щільність розподілу неперервної випадкової величини.** Нехай Х – неперервна випадкова величина, а – функція її розподілу, яка вважається диференційованою на R. Щільність розподілу випадкової величини Х називають функцію

Щільність розподілу має такі властивості:

1.Для будь-якого x єR

19

Надалі функцію вважатимемо неперервною на R.

2.Ймовірність того, що неперервна випадкова величина Х набуде значення, яке належить скінченному проміжку , дорівнює визначеному інтегралу щільності розподілу цієї випадкової величини з нижньою межею інтегрування aі верхньою b:

3.Правильною є формула

4.Правильною є рівність

**Приклад 2.** Щільність розподілу неперервної випадкової величини Х має вигляд –невід’ємне число. Знайти p.

Розв’язок

Згідно з формулою (7), маємо

Звідки

Приклад 2. Функція неперервної випадкової величини Х така :

Знайти . Обчислити

20

Розв’язок

Ймовірність події 0<X<2 обчислимо за формулою

або

**Приклад 3.** Закон неперервної випадкової величини Х задано у вигляді:

Знайти F(x). Обчислити

Розв’язок

Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

Імовірність події можна обчислити так:

21

**Приклад 4.** За заданою щільністю ймовірностей маємо:

Знайти значення сталої а та функцію F(x).

Розв’язок

Визначаємо значення сталої а:

Тут

Отже,

При знайденому значенні а щільність ймовірностей

Функція розподілу ймовірностей визначається так:

Отже,

**Числові характеристики неперервної випадкової величини.** Нехай Х – неперервна випадкова величина, а - щільність її розподілу, яка вважається такою, що невласний інтеграл збіжний. Математичним сподіванням випадкової величини Х називають число

22

або

Нехай Х – неперервна випадкова величина, математичне сподівання якої – щільність її розподілу, яка вважається такою, що невласний інтеграл збіжний. Дисперсією випадкової величини Х називається число

Можна показати, що математичне сподівання і дисперсія неперервної випадкової величини мають властивості, аналогічні тим, що були розглянуті вище для математичного сподівання та дисперсії дискретної випадкової величини.

Для неперервної випадкової величини Х середнє квадратичне відхилення σХ визначається, як і для дискретної величини, виразом:

Зазначимо, що не для всіх випадкових величин існує математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення.

**Приклад 5.** Неперервна випадкова величина Х задана густиною розподілу. Знайти її числові характеристики.

Розв’язок

Обчислюємо спочатку математичне сподівання:

М(Х)== 6x2-x3)dx = 6 (-) = 6()=;

Обчислюємо дисперсію:

D(X)=6 = 6 (-) - =

=6(

Обчислюємо середнє квадратичне відхилення:

 **Два важливих розподіли випадкових величин**

**Біномний розподіл.** Нехай проводиться nвипробувань (одноразових експериментів), причому ймовірність настання певної події А в кожному випробуванні дорівнює р і не залежить від результатів інших випробувань; такі випробування називають незалежними. Оскільки ймовірність настання події A в одному випробуванні дорівнює р, ймовірність її ненастання

Знайдемо ймовірність того, що при nвипробуваннях подія А настане kразів

23

Нехай подія А настала в перших kвипробуваннях і не настала в усіх n-kнаступних. Цю складну подію можна записати у вигляді добутку
А⋂А⋂…⋂А⋂⋂Ᾱ⋂Ᾱ⋂…⋂Ᾱ

k разівn-kразів

Загальне число складних подій, в яких подіях А настає k разів, дорівнює , де – число комбінацій без повторень з nелементів по kі – число, що дорівнює 1 (за означенням покладають ). При цьому ймовірність кожної складної події дорівнює . Оскільки складні події попарно несумісні, ймовірність суми їх дорівнює сумі їхніх ймовірностей. Отже, якщо – ймовірність настання події Аkразів при nвипробуваннях, то

Формулу (1) називають біномною формулою. Ця її назва пов’язаназ тим, що права частина (1) є загальним членом розкладання бінома Ньютона:

**Приклад 1.** Симетричну монету підкидають вісім разів підряд. Яка ймовірність того, що цифра випаде 5 разів?

Розв’язок

Тут n=8, k=5, . Отже за біномною формулою (1) маємо

Відповідь: .

Повернемось до розгляду nнезалежних випробувань, про які йшлося вище. Нехай Х – число тих із nвипробувань, в кожному з яких настала подія А. Зрозуміло, що подія А може взагалі не настати, настати один раз,два рази і т.д. й, нарешті, n разів. Отже, множиною можливих значень випадкової величини Х є множина . Бачимо, що випадкова величина Х дискретна. Закон її розподілу згідно з біномною формулою (1) має вигляд

24

Обчислимо МХ. Для кожного – число разів появи події А при i-му випробуванні є дискретною випадковою величиною, яка може набувати тільки двох значень: 0 з імовірністю qта 1 з імовірністю р. Тому Однак, оскільки маємо (при написанні першої з двох останніх рівностей скористалися наслідком властивості (3) математичного сподівання дискретної випадкової величини), тобто

**Приклад 2.** Нехай для якогось хижака ймовірність вдалого полювання дорівнює 0,4 при кожному зіткненні з жертвою. Знайти математичне сподівання числа Х спійманих жертв при 20 зіткненнях.

Розв’язок

Випадкова величина Х розподілена за біномним законом при і. Тому згідно з формулою (3), маємо .

Відповідь: .

Далі обчислимо та. Нехай - те саме, що й у формулі (3). Оскільки для кожного множини можливих значень випадкових величин і збігаються, Тому для кожного з указаних значень і маємо , й, отже, . Проте випадкові величини попарно незалежні, тому (при написанні першої з двох останніх рівностей скористалися властивістю 4 дисперсії дискретної випадкової величини), тобто

Звідки

Розглянуту тут величину Х називають випадковою величиною, розподіленою за біномним законом.