# Числові характеристики дискретної випадкової величини

# Означення 4. Математичним сподіванням (або середнім значенням) дискретної випадкової величини Х називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності:

# $$M\left(X\right)=\sum\_{k=1}^{n}x\_{k}p\_{k}.$$

# Нехай випадкова величина може набути значень $x\_{1},x\_{2}, …,x\_{n}$ і всі її значення однаково ймовірні. Тоді ймовірність кожного з них $p=\frac{1}{n}.$ Математичне сподівання цієї випадкової величини

# $M\left(X\right)=\sum\_{k=1}^{n}x\_{k}p\_{k}=x\_{1}\*\frac{1}{n}+x\_{2}\*\frac{1}{n}+…+x\_{n}\*\frac{1}{n}=\frac{x\_{1}+x\_{2}+…+x\_{n}}{n}$,

Отже в даному разі математичним сподіванням випадкової величини є середнє арифметичне всіх її можливих значень. У загальному випадку математичне сподівання випадкової величини не буде середнім арифметичним всіх її можливих значень. Проте, в деякому розумінні його можна розглядати саме так. Справа в тому, що в задачах практичного спрямування закон розподілу випадкової величини є невідомим. Тому виконують велику кількість випробувань або спостережень, кожне з яких відбувається у приблизно однакових умовах.

Властивості математичного сподівання:

$$1)M\left(C\right)=C, де C-стала величина;$$

$$2)M\left(X+C\right)=M\left(X\right)+C;$$

$$3)M\left(k\*X\right)=k\*M\left(X\right), де k-довільне число;$$

$4)M\left(X+Y\right)=M\left(X\right)+M\left(Y\right)$для будь-яких $X і Y$;

$5)M\left(X\*Y\right)=M\left(X\right)+M\left(Y\right), якщо X і Y$ *–* незалежні випадкові величини.

Точку з координатою $M\left(X\right)$ називають центром розсіяння ймовірностей. Випадкову величину $X-M(Y)$називають відхиленням. Різні випадкові величини можуть мати одне й те саме математичне сподівання. Тому виникає потреба розглянути ще одну числову характеристику для вимірювання ступеня розсіяння випадкової величини навколо її математичного сподівання.

**Означення 5.** Дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї випадкової величини.

Позначається дисперсія $D(X)$. Отже,

$$D\left(X\right)=M(X-M\left(X\right))^{2}.$$

Поряд з дисперсією розглядають також характеристику, яка вимірюється в тих самих одиницях, що і випадкова величина.

**Означення 6.** Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини Х називається корінь квадратний з дисперсії:

$$σ\left(X\right)=\sqrt{D(X)}.$$

**Приклад 3.** Знайти числові характеристики випадкової величини, яку розглянуто в прикладі 1:

$$M\left(X\right)=x\_{1}p\_{1}+x\_{2}p\_{2}+x\_{3}p\_{3}+x\_{4}p\_{4}=1\*0,1+2\*0,4+3\*0,2+4\*0,3=2,7.$$

Складемо закон розподілу випадкової величини $Y=(X-2,7)^{2};$

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$Y\_{k}$$ | 2,89 | 0,49 | 0,09 | 1,69 |
| $$p\_{k}$$ | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,3 |

$$D\left(X\right)=(x\_{1}-2,7)^{2}p\_{1}+(x\_{2}-2,7)^{2}p\_{2}+(x\_{3}-2,7)^{2}p\_{3}+(x\_{4}-2,7)^{2}p\_{4}=y\_{1}p\_{1}+y\_{2}p\_{2}+y\_{3}p\_{3}+y\_{4}p\_{4}=2,89\*0,1+0,49\*0,4+0,09\*0,2+1,69\*0,3=0,289+0,196+0,018+0,507=1,010;$$

$$σ\left(X\right)=\sqrt{1,010}=1,005$$

Відповідь:$σ\left(X\right)=1,005.$

16

**Приклад 4.** Випадкова величина Х – це кількість очок, які випадають при одному киданні грального кубика. Знайти $σ\left(X\right).$

Розв’язок

Маємо $M\left(X\right)=1\*\frac{1}{6}+2\*\frac{1}{2}+3\*\frac{1}{6}+4\*\frac{1}{6}+5\*\frac{1}{6}+6\*\frac{1}{6}=3,5.$

$$D\left(X\right)=(1-3,5)^{2}\*\frac{1}{6}+\left(2-3,5\right)^{2}\*\frac{1}{6}+\left(3-3,5\right)^{2}\*\frac{1}{6}+\left(4-3,5\right)^{2}\*\frac{1}{6}+\left(5-3,5\right)^{2}\*\frac{1}{6}+\left(6-3,5\right)^{2}\*\frac{1}{6}=\frac{35}{12};$$

$$σ\left(X\right)=\sqrt{\frac{35}{12}}=1,71.$$

**Теорема (формула обчислення дисперсії).** Дисперсія випадкової величини Х дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата і квадратом математичного сподівання цієї випадкової величини:

$$D\left(X\right)=M\left(X^{2}\right)-\left(M\left(X\right)\right)^{2}.$$

Дійсно, згідно з властивостями $M(X)$, знаходимо

$$D\left(X\right)=M(x^{2}-2XM\left(X\right)+\left(M\left(X\right)\right)^{2}=M\left(X\right)^{2}-2M^{2}\left(X\right)+M^{2}\left(X\right)=M\left(X\right)^{2}.$$

Властивості дисперсії:

$1)D\left(C\right)=0,$де С – стала;

$$2)D\left(CX\right)=D\left(X\right);$$

$$3)D\left(C+X\right)=D\left(X\right);$$

$4)D\left(X+Y\right)=D\left(X\right)+D\left(Y\right),$якщо Xі Y–незалежні;

$$5)D\left(X\_{1}+X\_{2}+…+X\_{n}\right)=D\left(X\_{1}\right)+D\left(X\_{2}\right)+…+D\left(X\_{n}\right), якщо X\_{1},X\_{2},…,X\_{n}-попарно залежні. $$