**Випадкові величини**

Одним із основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини, з яким пов’язане уявлення про результати деякого випробування, що полягає у вимірюванні певної числової величини. Величина, яка цікавить дослідника, може набути різних значень залежно від випадкових обставин. Прикладами випадкових величин можуть бути кількість очок, що випадають на грані гральної кості, кількість викликів, що надходять протягом певного проміжку часу, кількість новонароджених за добу в деякій місцевості, час безвідмовної роботи приладу, дальність польоту ракети тощо. Якщо в результаті експерименту величина набуває лише одного можливого числового значення, заздалегідь невідомого і обумовленого випадковими причинами, то її називають випадковою. Отже, випадкова величина є числом, яке ставиться у відповідності кожному можливому наслідку експерименту.

**Означення 1.** Випадковою величиною називається числова функція, визначена в просторі елементарних подій.

**Означення 2.** Випадкова величиною називається дискретною, якщо її значення можна записати у вигляді послідовності (скінченної або нескінченної).

Випадкові величини позначаються великими латинськими літерами X, Y, Z, а їх значення відповідно малими літерами.

Якщо випадкова величина Xнабуває значень $x\_{1}, x\_{2}, …, x\_{n}$з відповідними ймовірностями $p\_{1}, p\_{2}, …, p\_{n},$ то говорять, що задано закон розподілу ймовірностей випадкової величини. Закон розподілу дискретної випадкової величини зручно записувати у вигляді таблиці:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | $$x\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | … | $$x\_{n}$$ |
| P | $$p\_{1}$$ | $$ p\_{2}$$ | … | $$p\_{n}$$ |

 де $p\_{k}=P\left(x=x\_{k}\right)\geq 0, k=1, …, n.$

Враховуючи, що в одному випробуванні випадкова величина набуває лише одного можливого значення, зробимо висновок, що подія

$X=x\_{1}, X=x\_{2}, …, X=x\_{n}$утворюють повну групу, а тому

$$\sum\_{k=1}^{n}p\_{k}=1.$$

За допомогою формули (1) контролюють виконання розрахунків ймовірностей у таблиці.

Якщо множина можливих значень дискретної випадкової величини Xє нескінченною, то ряд$\sum\_{k=1}^{n}p\_{k}=1$збігається по одиниці, тобто

$$\sum\_{k=1}^{n}p\_{k}=1.$$

**Означення 3.** Дві випадкові величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набуває інша випадкова величина. У противному разі випадкові величини залежні.

Наведемо деякі приклади дискретних випадкових величин та їх розподілів.

1) Рівномірний дискретний розподіл: випадкова величина набуває n різних значень з імовірністю $\frac{1}{n}$кожне.

2) Біномінальний розподіл.

3) Розподіл Пуассона.

4) Геометричний розподіл: проводяться незалежні випробування з імовірністю успіху p.

X – кількість спроб до першої появи події А, тобто до успіху; $q=1-p.$

Закон розподілу подається таблицею:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | … | n | … |
| P | p | $$qp$$ | $$q^{2}p$$ | … | $$q^{n}p$$ | … |

5. Гіпергеометричний розподіл. Нехай в партії Nвиробів, із них n– бракованих, N – n – якісних. Навмання вибирають kвиробів. Знайти закон розподілу величини X – кількість бракованих виробів серед k.

$$p\_{i}=P\left(X=r\right)=\frac{Cn^{r}C\_{N-n}k-r}{C\_{N^{k}}}; x\_{i}=r=0,1, …, k.$$

**Приклад 1.** Вибираємо навмання одне з натуральних чисел від 1 до 10 і підрахуємо кількість його натуральних дільників X. Знайти закон розподілу випадкової величини X.

Розв’язок

Складемо спочатку таблицю кількості дільників натуральних чисел:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$Ω$$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Вибір будь-якого числа від 1 до 10 є рівно можливим, тому ймовірність його вибору дорівнює 0,1. Об’єднавши результати, що відповідають однаковій кількості дільників, і додавши їх ймовірність, знайдемо закон розподілу X:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 1 | 2 | 3 | 4 |
| P | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,3 |

Контроль:0,1+0,4+0,2+0,3=1.

**Приклад 2.** В грошовій лотереї розігруються 1 виграш у 1000 гривень, 10 виграшів по 100 гривень і 1 – виграшів по 1 гривні при загальній кількості білетів 10000. Знайти закон розподілу випадкового виграшу Xдля власника одного лотерейного білета.

Розв’язок

Очевидно, можливими значеннями для Xє $x\_{1}=0, x\_{2}=1, x\_{3}=100, x\_{4}=1000.$Їх ймовірності $p\_{2}=0,01, p\_{3}=0,001, p\_{4}=0,0001, p\_{1}=1-0,01-0,001-0,0001=0,9889.$

Тому закон розподілу виграшу Xможна задати таблицею

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 100 | 1000 |
| P | 0,9889 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |

Закон розподілу повністю характеризує дискретну випадкову величину, але він може бути невідомим; тоді корисними є деякі сталі величини, які дають уявлення про випадкову величину. Такі сталі величини називають числовими характеристиками випадкових величин. Серед числових характеристик особливе значення має математичне сподівання.