Лекція 12

Короткий зміст: Завдання кінематики твердого тіла. Види руху твердого тіла. Число ступенів свободи твердого тіла. Поступальний рух твердого тіла. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Кутова швидкість та кутове прискорення твердого тіла.

КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Абсолютно твердим тілом називається матеріальне тіло, геометрична форма якого і розміри не змінюються ні при яких механічних діях з боку інших тіл, а відстань між будь-якими двома його точками залишається постійною.

Кінематика твердого тіла, також як і динаміка твердого тіла, є одним з найбільш важких розділів курсу теоретичної механіки.

Задачі кінематики твердого тіла розпадаються на дві частини:

1. завдання руху і визначення кінематичних характеристик руху тіла в цілому;
2. визначення кінематичних характеристик (траєкторія, швидкість і прискорення) руху окремих точок тіла.

Існує п'ять видів руху твердого тіла:

1. поступальний рух;
2. обертання навколо нерухомої осі;
3. плаский рух;
4. обертання навколо нерухомої точки;
5. вільний рух.

Перші два називаються простими рухами твердого тіла:

Ступені свободи твердого тіла

Числом ступенів свободи твердого тіла називається число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення тіла в просторі відносно даної системи відліку.

Рух твердого тіла багато в чому залежить від числа його ступенів свободи.

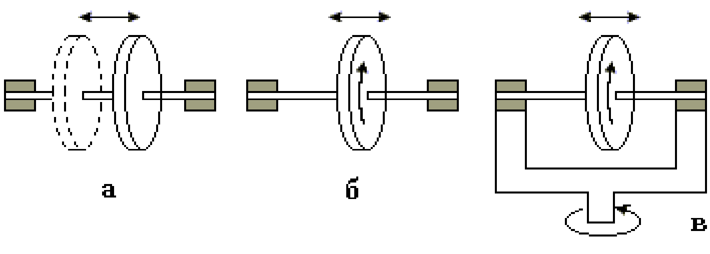


Рис. 4-1

Розглянемо приклад. Якщо диск, не обертаючись, може ковзати уздовж нерухомої в даній системі відліку осі (рис. а), то в даній системі відліку він, очевидно, володіє лише одним ступенем свободи - положення диска однозначно визначається, скажімо, координатою x його центру, відлічуваній уподовж осі. Але якщо диск, крім того, може ще і обертатися (рис. б), то він набуває ще одного ступеню свободи - до координати x додається кут повороту φ диска довкола осі. Якщо вісь з диском затиснута в рамці, яка може повертатися довкола вертикальної осі (рис. в), то число ступенів свободи стає рівним трьом – до x і φ додається кут повороту рамки ϕ.

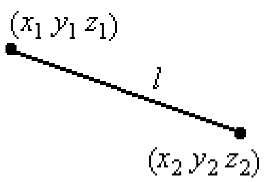
Вільна матеріальна точка в просторі має три ступені свободи: наприклад декартові координати ***x, y*** і ***z***. Координати точки можуть визначатись також в циліндричній (***r, φ, z***) і сферичній (***r, φ, ϕ***) системах відліку, але число параметрів, однозначно визначаючих положення точки в просторі завжди три.

Матеріальна точка на плоскості має два ступені свободи. Якщо в плоскості вибрати систему координат ***xOy,*** то координати ***x*** і ***y*** визначають положення точки на плоскості, а координата ***z*** тотожно рівна нулю.

Вільна матеріальна точка на поверхні будь-якого виду має два ступені свободи. Наприклад: положення точки на поверхні Землі визначається двома параметрами: широтою і довготою.

Матеріальна точка на кривій будь-якого виду має один ступінь свободи. Параметром, що визначає положення точки на кривій, може бути, наприклад, відстань уподовж кривий від початку відліку.

Розглянемо дві матеріальні точки в просторі, сполучені жорстким стрижнем довжини ***l***. Положення кожної точки визначається трьома параметрами, але на них накладена в'язь



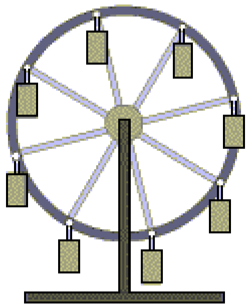
Рівняння $l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ є рівнянням в'язі. З цього рівняння будь-яка одна координата може бути виражена через останні п'ять координат (п'ять незалежних параметрів). Тому ці дві точки мають $(2 \cdot 3 - 1 = 5)$ п'ять ступенів свободи.

Розглянемо три матеріальні точки в просторі, такі, що не лежать на одній прямій, сполучені трьома жорсткими стрижнями. Число ступенів свободи цих точок рівне $(3 \cdot 3 - 3 = 6)$ шести.

Вільне тверде тіло в загальному випадку має 6 ступенів свободи. Дійсно, положення тіла в просторі відносно якої-небудь системи відліку, визначається завданням трьох його точок, таких, що не лежать на одній прямій, і відстані між точками в твердому тілі залишаються незмінними при будь-яких його рухах. Згідно вище сказаному, число ступенів свободи має бути рівне шести.

Поступальний рух твердого тіла.

Поступальним рухом твердого тіла називається таке його рух, при якому будь-яка пряма, що жорстко скріпляє з тілом, залишається паралельним своєму первинному положенню в кожен момент часу.



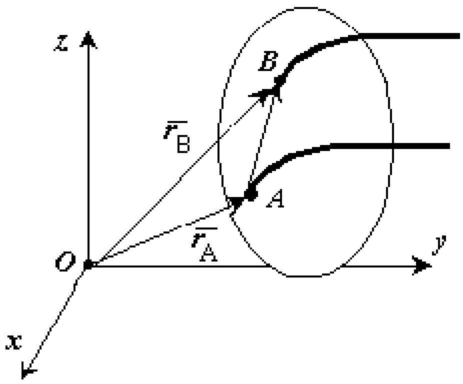
Педалі велосипеда поступально рухаються відносно його рами під час руху, поршні в циліндрах двигуна внутрішнього згорання відносно циліндрів, кабіни колеса огляду в парках відносно Землі.

Траєкторії точок в поступально рухаючомуся твердому тілі можуть бути не лише прямими, але і кривими, у тому числі колами.

Рис. 4-2

Теорема. При поступальній ході твердого тіла траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок твердого тіла однакові.

Якщо обрати дві точки твердого тіла А і В, то радіус-вектори цих точок пов'язані співвідношенням $\overline{r_B} = \overline{r_A} + \overline{AB}$. Траєкторія точки А це крива, котра задається функцією $\overline{r_A}(t)$, а траєкторія точки В це крива, котра задається функцією $\overline{r_B}(t)$. Траєкторія точки В отримується переносом траєкторії точки А в просторі вздовж вектора $\overline{AB}$, який не міняє своєї величини і напряму в часі. Отже, траєкторії всіх точок твердого тіла однакові.



Продиференціюємо за часом вираз $\overline{r_B} = \overline{r_A} + \overline{AB}$.

Отримуємо $\overline{v_B} = \dfrac{\overline{r_A}}{dt} + \dfrac{\overline{AB}}{dt} = \overline{v_A}$, так як $\dfrac{\overline{AB}}{dt} = \overline{0}$. Продиференціюємо за часом швидкості і отримаємо вирази $\overline{a_B} = \overline{a_A}$.

Рис. 4-3

Отже, швидкості і прискорення всіх точок твердого тіла однакові. Що і потрібно було довести.

Поступальна хода твердого тіла повністю характеризується рухом однієї будь-якої його точки.

Тверде тіло при поступальній ході має три міри свободи.

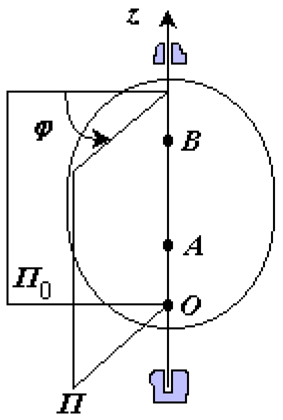
Для завдання руху твердого тіла в декартовій системі координат досить знати координати $x(t),\ y(t),\ z(t)$ любої його точки.

Функції $x(t),\ y(t),\ z(t)$ називаються **<u>рівняннями поступального руху твердого тіла</u>**.

Обертання твердого тіла довкола нерухомої осі

Обертанням твердого тіла довкола нерухомої осі називається такий його рух, при якому дві точки тіла залишаються нерухомими протягом всього часу руху. При цьому також залишаються нерухомими всі точки тіла, розташовані на прямій, що проходить через його нерухомі точки. Ця пряма називається **<u>віссю обертання тіла</u>**.

Нехай точки А і В нерухомі. Вздовж осі обертання направимо ось Oz. Через ось обертання проведемо нерухому плоскість Π_0 і рухому Π, скріплену з тілом, що обертається (при $t = 0$ $\Pi \to \Pi_0$).



Положення плоскості Π і самого тіла визначається двогранним кутом між плоскістю Π і Π_0. Позначимо його φ. Кут φ називається **<u>кутом повороту тіла</u>**.

Положення тіла відносно вибраної системи відліку однозначно визначається у будь-який момент часу, якщо задано рівняння $\varphi = f(t)$, де $f(t)$ - люба двічі диференціюєма функція часу. Це рівняння називається **<u>рівнянням обертання твердого тіла довкола нерухомої осі</u>**.

Рис. 4-4

У тіла, що здійснює обертання довкола нерухомої осі, один ступінь свободи, оскільки його положення визначається завданням лише одного параметра – кута φ.

Кут φ вважається позитивним, якщо він відкладається проти годинникової стрілки, і негативним – в протилежному напрямі. Траєкторії точок тіла при його обертанні довкола нерухомої осі є колами, розташованими в плоскості перпендикулярних осі обертання.

Для характеристики обертального руху твердого тіла довкола нерухомої осі введемо поняття кутової швидкості і кутового прискорення.

<u>Алгебраїчною кутовою швидкістю</u> тіла в будь який момент часу називається перша похідна за часом від кута повороту у цей момент, тобто
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Кутова швидкість є позитивною величиною при обертанні тіла проти годинникової стрілки, оскільки кут повороту зростає з часом, і негативною – при обертанні тіла за годинниковою стрілкою, тому що кут повороту при цьому убуває.

Розмірність кутової швидкості за визначенням: $[\omega]=\dfrac{угол}{время}=\dfrac{рад}{c}=c^{-1}$

У техніці кутова швидкість – це частота обертання, виражена в оборотах в хвилину. За одну хвилину тіло обернеться на кут, де n - число оборотів в хвилину. Розділивши цей кут на число секунд в хвилині, отримаємо

$$\omega_{c^{-1}}=\frac{2\cdot\pi\cdot n_{îá\ /\ õâ}}{60}=\frac{\pi\cdot n_{îá\ /\ õâ}}{30}\approx 0.1\cdot n_{îá\ /\ õâ}$$

<u>Алгебраїчним кутовим прискоренням тіла</u> називається перша похідна за часом від кутової швидкості, тобто друга похідна від кута повороту тобто $\varepsilon=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\omega}{dt^2}$

Розмірність кутового прискорення за визначенням: $[\varepsilon]=\dfrac{угол}{время^2}=\dfrac{рад}{c^2}=c^{-2}$

Введемо поняття векторів кутової швидкості і кутового прискорення тіла. $\overline{\omega}=\omega\cdot\overline{k}$ і $\overline{\varepsilon}=\varepsilon\cdot\overline{k}$, де $\overline{k}$ – одиничний вектор осі обертання. Вектори $\overline{\omega}$ і $\overline{\varepsilon}$ можна зображувати в будь-яких точках осі обертання, вони є ковзними векторами.

Кутова алгебраїчна швидкість це проекція вектора кутової швидкості на вісь обертання. Кутове алгебраїчне прискорення це проекція вектора кутового прискорення швидкості на вісь обертання.

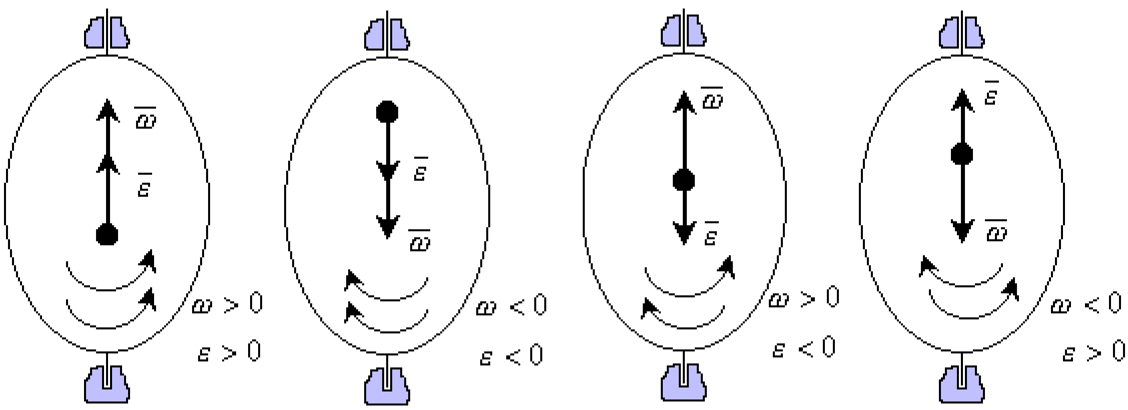


Рис. 4-5

Якщо $\varepsilon>0$ при $\omega>0$, то алгебраїчна кутова швидкість зростає з часом і, отже, тіло обертається прискорено в даний момент часу в позитивну сторону. Напрям векторів $\overline{\omega}$ і $\overline{\varepsilon}$ збігаються, отже обидва вони направлені в позитивну сторону осі обертання Oz.

При $\varepsilon<0$ і $\omega<0$ тіло обертається прискорено в негативну сторону. Напрям векторів $\overline{\omega}$ і $\overline{\varepsilon}$ збігаються, обидва вони направлені в негативну сторону осі обертання Oz.

Якщо $\varepsilon < 0$ при $\omega > 0$, то маємо сповільнене обертання в позитивну сторону. Вектори $\overline{\omega}$ і $\overline{\varepsilon}$ направлені в протилежні сторони.

Якщо $\varepsilon > 0$ при $\omega < 0$, то маємо сповільнене обертання в негативну сторону. Вектори $\overline{\omega}$ і $\overline{\varepsilon}$ направлені в протилежні сторони.

Кутову швидкість і кутове прискорення на малюнках зображують дуговими стрілками довкола осі обертання (якщо не можна зобразити вектори). Дугова стрілка для кутової швидкості вказує напрям обертання тіла, а дугова стрілка для кутового прискорення – напрям, в якому збільшується кутова алгебраїчна швидкість. Для прискореного обертання дугові стрілки для кутової швидкості і кутового прискорення мають однакові напрями, для сповільненого їхні напрями протилежні.

Окремі випадки обертання твердого тіла

Рівномірне обертання

Обертання називається рівномірним, якщо його кутова швидкість постійна, тобто $\omega = const$.

Так як $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$, то $d\varphi = \omega \cdot dt$. Початкові умови: $t = t_0, \varphi = \varphi_0$, то після інтегрування отримаємо

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \cdot \int_{t_0}^{t} dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \omega \cdot (t - t_0) \qquad \text{або} \quad \varphi = \omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0$$

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{(t - t_0)}, \quad (t - t_0) = \frac{\varphi - \varphi_0}{\omega}$$

Рівнозмінне обертання

Обертання називається рівноприскореним, якщо його кутове прискорення постійне і більше нуля, тобто $\varepsilon = const > 0$.

Обертання називається рівносповільненим, якщо його кутове прискорення постійне і менше нуля, тобто $\varepsilon = const < 0$.

Так як $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, то $d\omega = \varepsilon \cdot dt$. Початкові умови: $t = t_0, \ \varphi = \varphi_0 \ \ \omega = \omega_0$, то після інтегрування отримаємо

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \cdot \int_{t_0}^{t} dt, \quad \omega - \omega_0 = \varepsilon \cdot (t - t_0) \quad \text{або} \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0)$$

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{(t - t_0)}, \quad (t - t_0) = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}$$

далі $d\varphi = \omega \cdot dt$, $\quad d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0)) \cdot dt$ і після інтегрування,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_{t_0}^{t} (\omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0))dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 \cdot (t - t_0) + \varepsilon \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

а $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \varepsilon \cdot \dfrac{(t - t_0)^2}{2}$