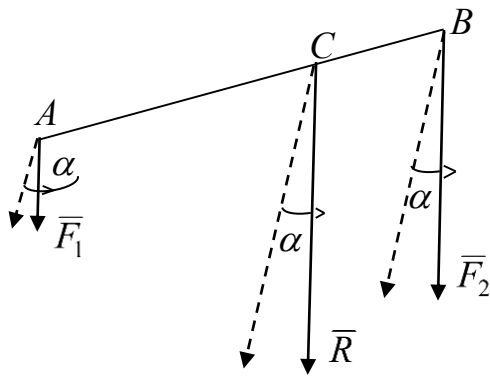


ЦЕНТР ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І ЦЕНТР ВАГИ

9.1. Центр паралельних сил

Розглянемо дві паралельні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, направлені в один бік (рис. 9.1). Згідно з п. 4.4.1 така система сил зводиться до рівнодійної $\vec{R}$. При цьому виконуються співвідношення:



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{CA}. \quad (9.1)$$

Якщо сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ повернути на однаковий кут α навколо точок їх прикладання A і B , то рівнодійна $\vec{R}$ повернеться на той самий кут навколо точки

Рис. 9.1

C , оскільки співвідношення (9.1) не зміняться. Такі ж міркування можна привести і для двох паралельних сил, направлених у різні боки.

Точка C , через яку проходить лінія дії рівнодійної системи паралельних сил при будь-яких поворотах цих сил навколо точок їх прикладання на однаковий кут, називається *центром паралельних сил*.

У яких випадках існує така точка C і як знайти їх координати? На це запитання дає відповідь теорема про *центр паралельних сил*.

Теорема. Якщо головний вектор системи паралельних сил не дорівнює нулю, то центр паралельних сил (точка C) існує і його положення визначається за формулою

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k^* \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad (9.2)$$

де $\vec{r}_k$ - радіуси-вектори точок прикладання сил; $\vec{r}_c$ - радіус-вектор центра паралельних сил; F_k^* - модулі паралельних сил, які відрізняються знаком для сил, направлених у різні боки.

Доведення. Розглянемо систему n паралельних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$. Якщо її головний вектор не дорівнює нулю, то, як показано у п. 5.4.4.3, така система паралельних сил зводиться до рівнодійної $\bar{R}$. Нехай точка O_1 - це якась точка лінії дії цієї рівнодійної (рис. 9.2), $\bar{r}, \bar{r}_k$ - відповідно радіуси-вектори точки O_1 і точок прикладання сил $\bar{R}$ і $\bar{F}_k$ відносно вибраного центра O .

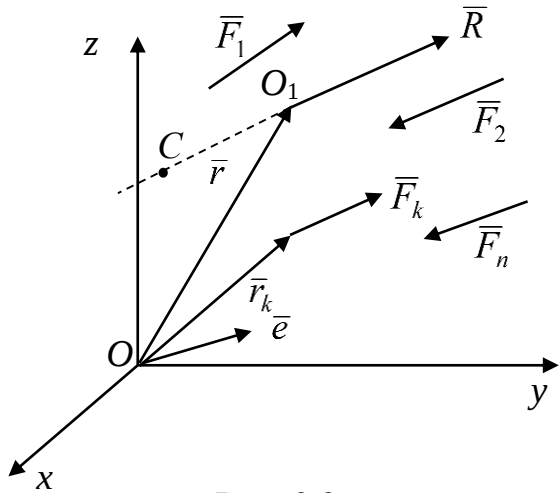


Рис. 9.2

Згідно з теоремою Варіньона про момент рівнодійної (п. 5.6), отримаємо

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) \text{ або}$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) - \bar{M}_O(\bar{R}) = 0$$

$$\text{або } \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k - \bar{r}) \times \bar{F}_k = 0. \quad (9.3)$$

Рівність (9.3) запишемо у наступній формі

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \bar{r} \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0. \quad (9.4)$$

Введемо у розгляд одиничний вектор $\bar{e}$, паралельний лініям дії сил $\bar{F}_k$. Тоді кожна із заданої системи сил може бути виражена через вектор $\bar{e}$:

$$\bar{F}_k = F_k^* \bar{e}, \quad (9.5)$$

де $F_k^* = F_k$, якщо напрями векторів $\bar{F}_k$ и $\bar{e}$ збігаються, і $F_k^* = -F_k$, якщо ці напрями протилежні. При цьому очевидно, що

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k^*. \quad (9.6)$$

Підставляючи (9.5) і (9.6) у рівняння (9.4), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times F_k^* \bar{e} - \bar{r} \times \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k^* = 0,$$

або
$$\left[\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^* - \bar{r} \sum_{k=1}^n F_k^* \right] \times \bar{e} = 0.$$

Остання рівність виконується при будь-якому напрямі сил (напрямі вектора $\bar{e}$) тільки за умовою, що перший множник дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^* - \bar{r} \sum_{k=1}^n F_k^* = 0. \quad (9.7)$$

Ця рівність має єдиний розв'язок відносно радіуса-вектора $\bar{r}$, який визначає точку прикладання рівнодійної. Такою точкою і є центр паралельних сил, чим доводиться його існування. Позначимо радіус-вектор центра паралельних сил як $\bar{r}_c$. Тоді з рівняння (9.7) отримаємо вираз:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}.$$

Теорему доведено.

Формулу (9.2) можна подати у скалярній формі:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad (9.9)$$

де $x_c, y_c, z_c, x_k, y_k, z_k$ - відповідно декартові координати центра C паралельних сил і точок прикладання сил $\bar{F}_k$.

Вирази $\sum_{k=1}^n x_k F_k^*$, $\sum_{k=1}^n y_k F_k^*$, $\sum_{k=1}^n z_k F_k^*$ у формулах (9.9) називаються відповідно *статичними моментами* заданої системи сил відносно координатних площин yOz , xOz , xOy . Зазначимо, що коли початок координат сумістити з центром паралельних сил, то

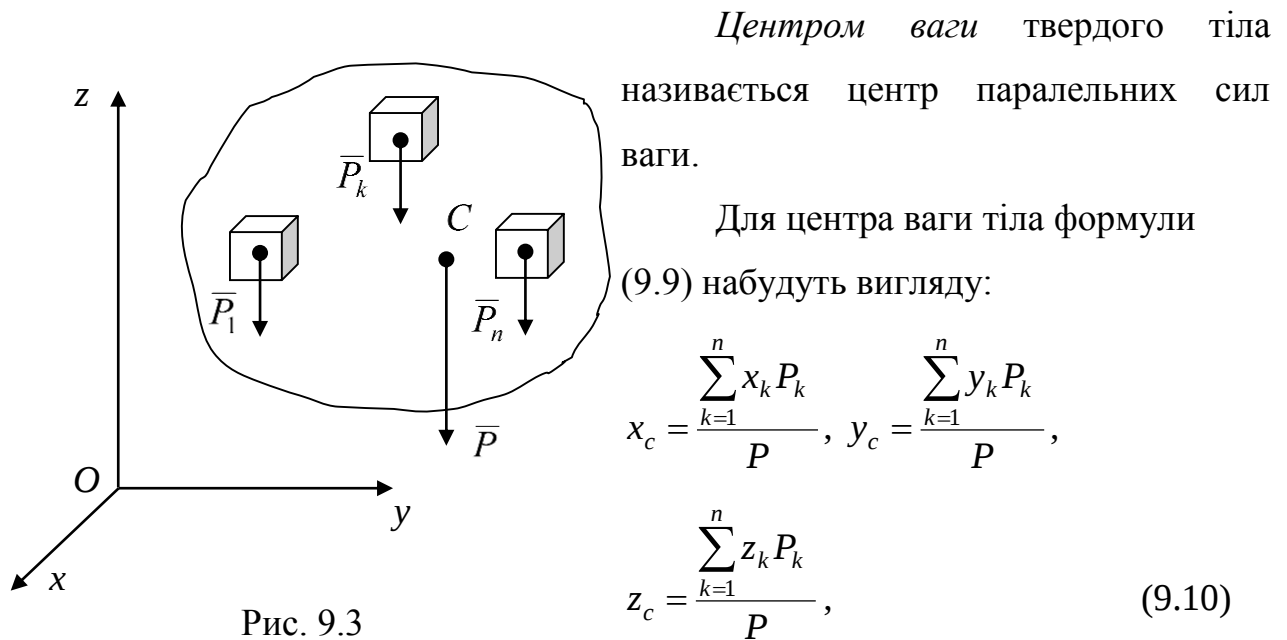
$$x_c = y_c = z_c = 0$$

і статичні моменти заданої системи сил дорівнюватимуть нулю.

9.2. Центр ваги твердого тіла

Розглянемо тверде тіло, яке знаходиться в полі сил тяжіння. Якщо розмірами тіла можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, то можна

вважати, що на частки цього тіла діють сили ваги $\bar{P}_k$, які складають систему паралельних сил (рис. 9.3).



де $P = \sum_{k=1}^n P_k$ - сила ваги (тіла); x_k, y_k, z_k - координати точки прикладання сили ваги $\bar{P}_k$ окремої частини тіла.

9.2.1. Центр ваги однорідного твердого тіла

Якщо тіло однорідне, то вага кожної частки тіла пропорційна його об'єму:

$$P_k = \gamma_1 V_k, \quad (9.11)$$

де V_k - об'єм елементарної частки тіла; γ_1 - вага одиниці об'єму тіла.

Підставивши (9.11) у (9.10), отримаємо:

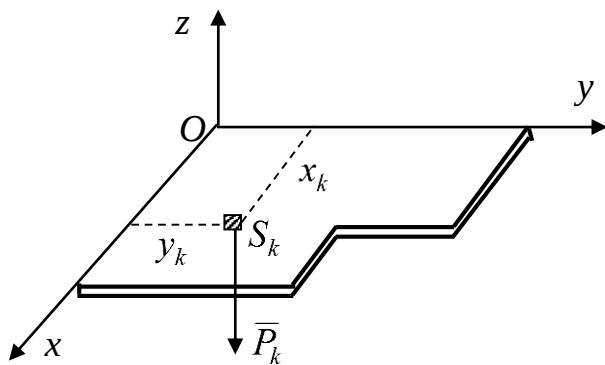
$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_1 V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\gamma_1 \sum_{k=1}^n x_k V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k V_k}{V}, \\ y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k V_k}{V}, \\ z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V}, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

аналогічно

де $V = \sum_{k=1}^n V_k$ - об'єм тіла.

Із формул (9.12) видно, що положення центра ваги однорідного тіла залежить тільки від геометричної форми і розмірів тіла. Тому точку C , яка визначається за формулами (9.12), називають *центром ваги об'єму тіла*.

9.2.2. Центр ваги однорідної пластини



Пластиною називають плоске тіло, один розмір якого (товщина) набагато менше двох інших (довжини і ширини):

$$P_k = \gamma_2 S_k, \quad (9.13)$$

де S_k - площа елементарної частки пластини; γ_2 - вага одиниці площі.

Рис. 9.4

Підставивши (9.13) у (9.10) і вважаючи, що координатна площина xOy збігається з площиною пластини, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_2 S_k}{\gamma_2 S} = \frac{\gamma_2 \sum_{k=1}^n x_k S_k}{\gamma_2 S} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S}, \\ \text{аналогічно} \quad y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S}, \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

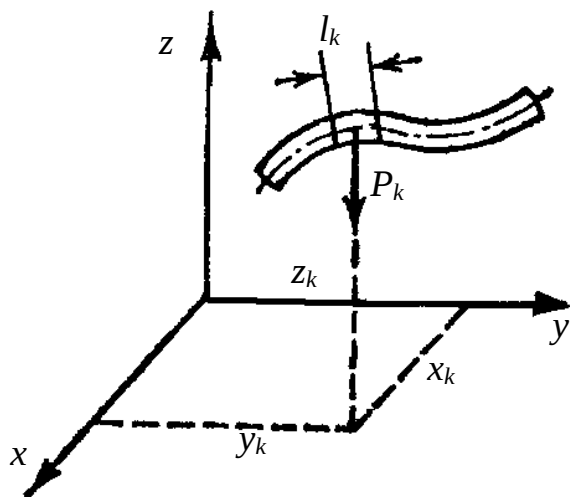
де $S = \sum_{k=1}^n S_k$ - площа пластини.

Точку C , координати якої визначаються за формулами (9.14), називають *центром ваги площі*.

Вирази у чисельниках формулах (9.14) називають відповідно *статичними моментами площі* S_y і S_x відносно осей x і y :

$$S_y = \sum_{k=1}^n x_k S_k = x_c \cdot S, \quad S_x = \sum_{k=1}^n y_k S_k = y_c \cdot S. \quad (9.15)$$

9.2.3. Центр ваги однорідного стержня



Стержнем називають тіло, один розмір якого (довжина) набагато більше двох інших. У цьому випадку вага елементарної частки тіла пропорційна її довжині (рис. 9.5):

$$P_k = \gamma_3 l_k, \quad (9.16)$$

Рис. 9.5

де l_k - довжина елементарної частки стержня; γ_3 - вага одиниці довжини.

Підставивши (9.16) у (9.10), отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_3 l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\gamma_3 \sum_{k=1}^n x_k l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k l_k}{L}, \\ \text{аналогічно } y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k l_k}{L}, \\ z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k l_k}{L}, \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

де $L = \sum_{k=1}^n l_k$ - довжина стержня.

Точку C , координати якої визначаються за формулами (9.17), називають *центром ваги лінії*.