Способи визначення координат центра ваги

1. ***Спосіб симетрії.*** Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги знаходиться відповідно в площині, на осі або в центрі симетрії.

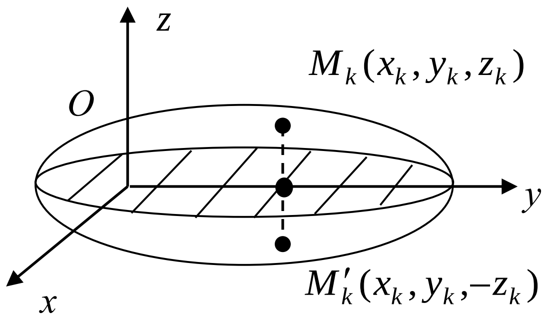


Рис. 9.6

Доведемо це твердження для тіла, що має площину симетрії (рис. 9.6). Розташуємо координатну площину *xOy* у площині симетрії (на рис. 9.6 ця площина заштрихована). Візьмемо в тілі дві точки M_k і M'_k, які розташовані симетрично відносно площини *xOy*. У цих точок збігаються координати x_k, y_k, а координати z_k розрізняються тільки знаком. Виділимо навколо точок M_k, M'_k рівні елементарні об'єми V_k. Підсумуємо додатки:

$$z_k V_k + z'_k V_k = z_k V_k - z'_k V_k = 0.$$

Розглянувши всі елементарні об'єми, отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n} z_k V_k = 0$$

і обчислимо координату z_c центра ваги тіла за формулою (9.12):

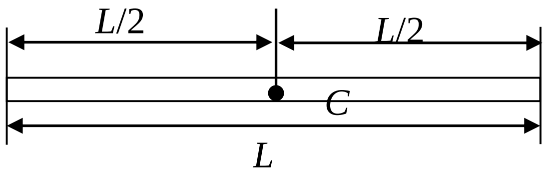
$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k V_k}{V} = 0.$$

Це означає, що центр ваги розглядуваного тіла знаходиться у площині симетрії.

Аналогічно можна довести твердження для тіла, що має вісь або центр симетрії.

Приклади. Розглянемо декілька прикладів.

а) прямолінійний стержень



Центр симетрії такого стержня є точка у середині стержня. Отже, центр ваги прямолінійного стержня – точка *C* – знаходиться у середині стержня (рис. 9.7).

б) прямокутник

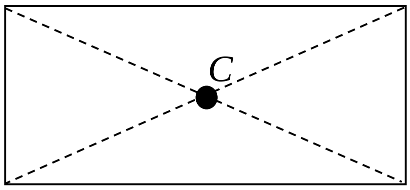


Рис. 9.8

Центром симетрії прямокутника є точка перетину його діагоналей. Тоді центр ваги прямокутника – точка C – також знаходиться у точці перетину діагоналей (рис. 9.8). Як відомо, діагоналі в точці перетину діляться навпіл.

в) коло

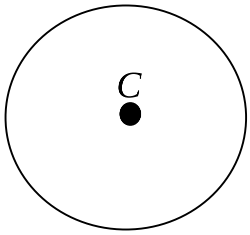


Рис. 9.9

Центром симетрії, а значить і центром ваги кола є його центр (рис. 9.9).

2. Спосіб розбиття.

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких часток, для яких положення центрів ваги відомі, то координати центра ваги тіла можна обчислити за формулами (9.10), (9.12), (9.14) або (9.17).

Приклад 1. Визначити координати центра ваги площі (рис. 9.10).

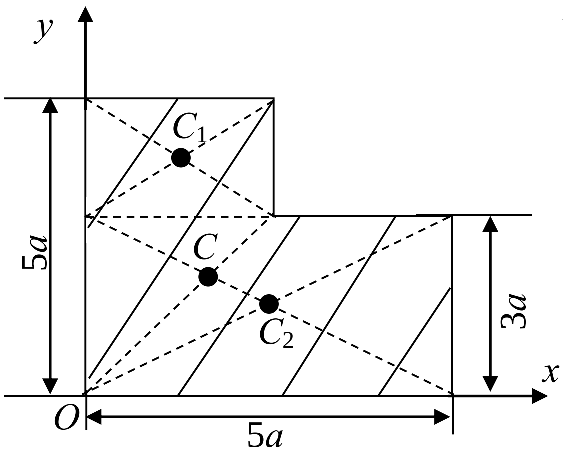


Рис. 9.10

Розв'язання. Розіб'ємо площу на два прямокутники, центри ваги яких C_1 і C_2 знаходяться в точках перетину діагоналей. Виберемо систему координат Oxy. Дані про координати центрів ваги прямокутників і їх площі запишемо в табл. 9.1.

Таблиця 9.1

k	x_k	y_k	S_k
1	$1{,}5a$	$4a$	$6a^2$
2	$2{,}5a$	$1{,}5a$	$15a^2$

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами (9.14):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k S_k}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{1{,}5a \cdot 6a^2 + 2{,}5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{9a^3 + 37{,}5a^3}{21a^2} =$$

$$= \frac{46{,}5}{21} a \approx 2{,}2a,$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k S_k}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4a \cdot 6a^2 + 1{,}5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{24a^3 + 22{,}5a^3}{21a^2} =$$

$$= \frac{46{,}5}{21} a \approx 2{,}2a.$$

Значення координат точки C (2,2a; 2,2a) свідчать, що вона лежить на бісектрисі кута, проведеної з центра координат, яка є лінією симетрії площі.

3*. **Спосіб доповнення (або від'ємних площин).*** Якщо тіло має порожнину (виріз), то цю порожнину (виріз) можна розглядати як тіло з від'ємною вагою (площею) і для розрахунків використовувати спосіб розбиття.

Приклад 2. Розглянемо задачу прикладу 1.

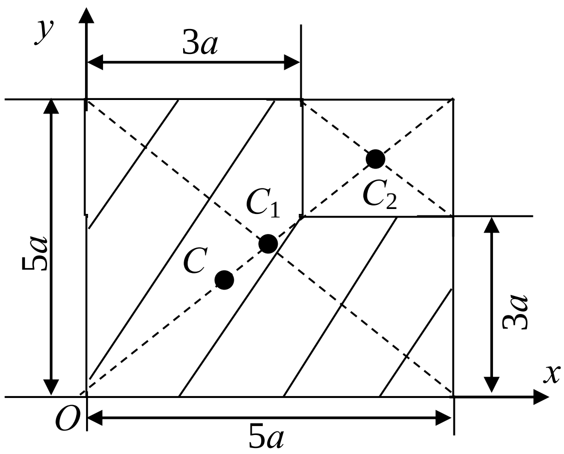


Рис. 9.11

Розв'язання. Уявимо площу як квадрат (1) зі сторонами $5a \times 5a$, з якого вирізали квадрат (2) зі сторонами $2a \times 2a$ (рис. 9.11). Площу останнього квадрата будемо вважати від'ємною. Дані про координати центрів ваги квадратів і їх площі запишемо в табл. 9.2.

Таблиця 9.2

k	x_k	y_k	S_k
1	2,5a	2,5a	25a^2
2	4a	4a	-4a^2

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами (9.14):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k S_k}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2{,}5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} =$$

$$= \frac{46{,}5}{21} a \approx 2{,}2a;$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k S_k}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2{,}5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62{,}5a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} =$$

$$= \frac{46{,}5}{21} a \approx 2{,}2a.$$

4. ***Спосіб інтегрування.*** Якщо тіло неможливо розбити на скінченне число часток, у формулах (9.10), (9.12), (9.14), (9.17) переходять до інтегралів.

Наприклад, формули (9.14) матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\int_{(S)} x dS}{S} \\ y_c &= \frac{\int_{(S)} y dS}{S} \end{aligned}\right\}, \qquad (9.18)$$

де інтеграли поширюються на площу S.

9.4. Центри ваги простіших фігур

Розглянемо декілька простих фігур, з яких можуть складатись більш складні фігури.

а) трикутник

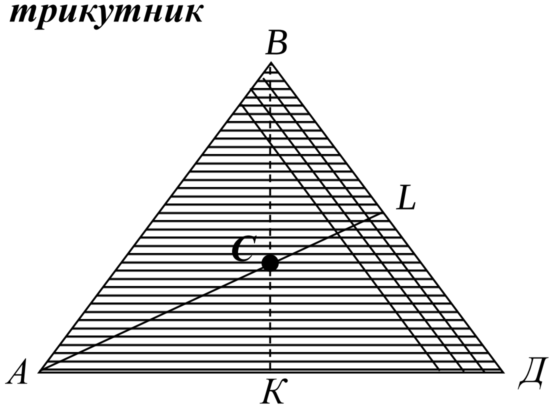


Рис. 9.12

Скористаємось способом розбиття і розділимо трикутник *АВД* на елементарні смужки, провівши лінії, паралельні стороні *АД* (рис. 9.12). Кожну таку смужку можна прийняти за прямокутник, центр симетрії якого лежить у середині, тобто на медіані *ВК* трикутника. Розглядаючи смужки, паралельні стороні *ВД*, приходимо до висновку, що центр ваги трикутника має лежати на медіані *AL*. Отже, центр ваги трикутника знаходиться у точці перетину його медіан. Ця точка, як відомо, ділить кожну із медіан у відношенні 1:2, тобто $CK : CB = 1:2$, $CL : CA = 1:2$.

б) дуга кола

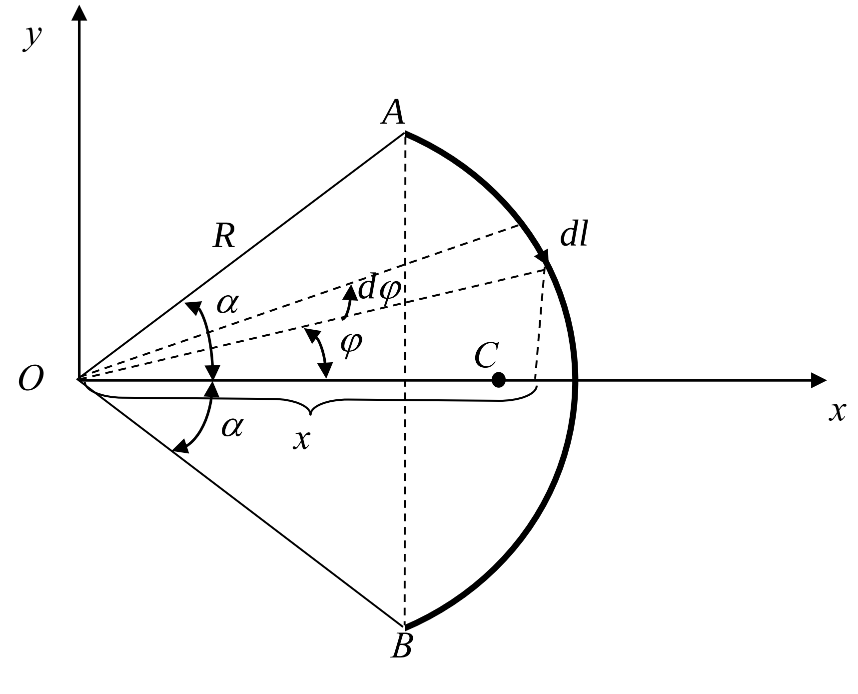


Рис. 9.13

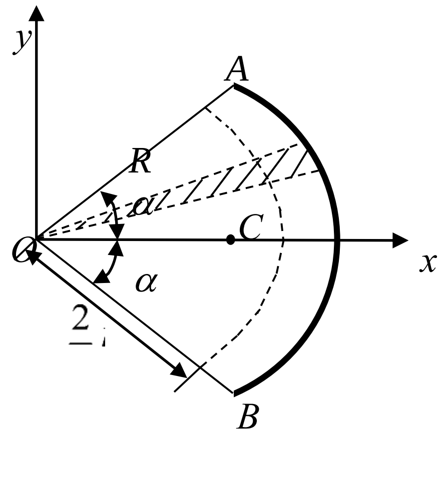
Розглянемо дугу *AB* кола радіусом *R* з центральним кутом 2α (рис. 9.13). Направимо вісь *Ox* по осі симетрії дуги, яка є бісектрисою кута 2α. Центр ваги дуги кола лежить на осі симетрії, тобто $y_c = 0$, і залишається знайти x_c. Для цього скористаємось формулою

$$x_c = \frac{\int_A^B x dl}{L}, \tag{9.19}$$

яка вийде, якщо у формулі (9.17) перейти до інтеграла. Для елементарної частки довжини dl, як виходить з рис. 9.13, $x = R\cos\varphi$, $dl = Rd\varphi$, $L = R \cdot 2\alpha$. Тоді

$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi R d\varphi}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi d\varphi}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \sin\alpha\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 2\sin\alpha}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}. \tag{9.20}$$

в) коловий сектор



Розглянемо коловий сектор з центральним кутом 2α і радіусом R (рис. 9.14). Направимо вісь Ox по осі симетрії сектора, яка є бісектрисою кута 2α. Центр ваги сектора лежить на осі симетрії, тобто $y_c = 0$. Розіб'ємо коловий сектор на елементарні сектори (заштрихований на рис. 9.14), кожен з котрих можна прийняти за рівнобедрений трикутник. Отже, центр ваги кожного елементарного трикутника лежить на відстані $\frac{2}{3}R$ від початку координат. Геометричним місцем центрів ваги всіх елементарних трикутників буде дуга кола радіусом $\frac{2}{3}R$. У цьому випадку можна скористатись формулою для центра ваги дуги кола (9.20):

$$x_c = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (9.21)$$

Зауваження. У формулах (9.20), (9.21) кут α треба брати в радіанах.

9.5. Стійкість твердого тіла при його перекиданні

Визначення положення центра ваги тіла пов'язано з розв'язанням задач на стійкість тіла при його перекиданні. Розглянемо, наприклад, тверде тіло, яке має нерухому точку O і знаходиться під дією довільної плоскої системи активних сил $\overline{F}_1,...,\overline{F}_n$ (рис. 9.15) у стані спокою. Візьмемо точку O за початок системи координат Oxy. При зведенні системи активних сил до центра O отримаємо, що при цьому головний вектор активних сил зрівноважиться реакцією нерухомої точки, а головний момент активних сил має дорівнювати нулю:

$$M_O = \sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F}_k) = 0. \qquad (9.22)$$

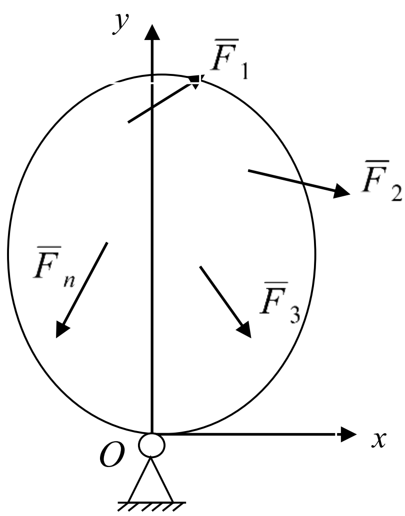


Рис.9.15

Це рівняння не містить реакцій в'язів (нерухомого шарніра) і є умовою рівноваги твердого тіла з нерухомою точкою O.

Рівняння (9.22) є також *умовою стійкості* твердого тіла при його перекиданні.

Розглянемо приклади задач на стійкість твердого тіла при його перекиданні.

Приклад 1. Визначити мінімальну ширину a бетонної греблі довжиною b=1 м прямокутного перерізу за умови стійкості при перекиданні, якщо висота греблі і глибина води h = 3 м, питома вага води $\gamma_в = 10$ кН/м^3, питома вага матеріалу греблі $\gamma_г = 22$ кН/м^3 (рис.9.16).

Розв'язання. Розглянемо бетонний паралелепіпед зі сторонами h, a і b. На нього діє зовнішня активна сила тиску води, рівнодійна якої за модулем дорівнює $Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot h = \frac{1}{2} \gamma_в \cdot h \cdot 1 \cdot h = \frac{1}{2} \gamma_в \cdot h^2$ і прикладена на відстані 1/3h від підвалини греблі, а також сила ваги $P = \gamma_г \cdot h \cdot a \cdot b$, яка прикладена у центрі ваги C греблі.

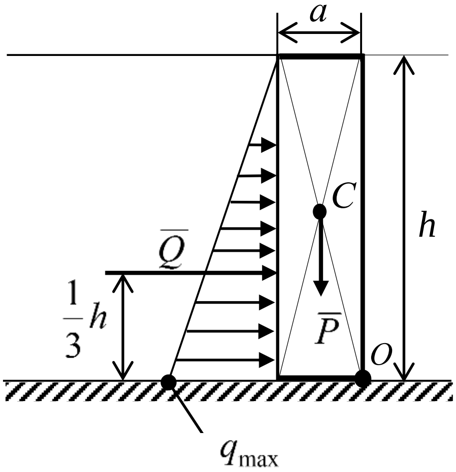


Рис. 9.16

Можливим перекиданням греблі буде її обертання навколо ребра O, тому умовою рівноваги буде

$$\sum M_O(\overline{F}_k) = -Q\frac{h}{3} + P\frac{a}{2} = 0.$$

З цього рівняння

$$a^2 = \frac{2Qh}{3P} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\gamma_в h^2 \cdot h}{3\gamma_г h} = \frac{\gamma_в h^2}{3\gamma_г} = \frac{10 \cdot 9}{3 \cdot 22} = \frac{15}{11} = 1{,}36 \ (\text{м}^2),$$

або $a = 1{,}17$ (м).

Зауваження. При розгляді задач на перекидання тіла вводять поняття коефіцієнта стійкості. *Коефіцієнтом стійкості* при перекиданні тіла називається відношення суми моментів сил, що намагаються утримати тіло від перекидання, до суми моментів сил, що намагаються перекинути тіло. Постановка задачі в прикладі 1 передбачала її розв'язання у припущенні, що коефіцієнт стійкості дорівнює 1.

Приклад 2. Визначити розміри відомої іграшки „Іван-покиван” (*h, R* рис.9.17), яка складається з півкулі і конуса, щоб вона була стійкою при перекиданні. Конус і півкуля виконані з одного і того самого матеріалу.

Розв’язання. Зазначимо, що точка опори О такої конструкції лежить на вертикальному радіусі АО.

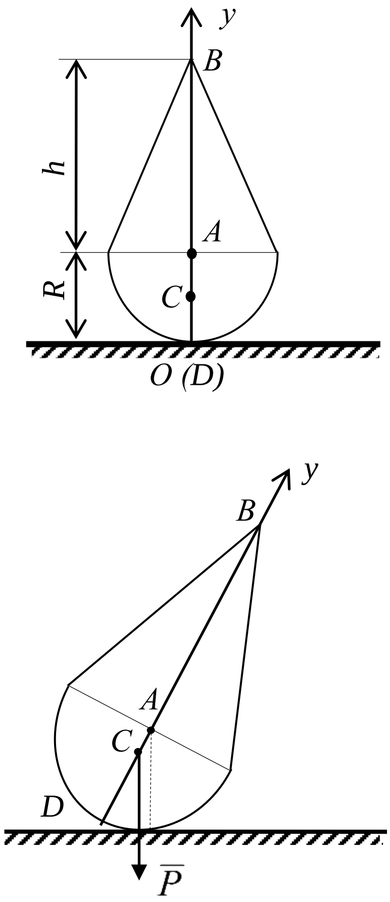


Рис.9.17

Внаслідок симетрії конструкції центр її ваги (точка *C*) лежить на відрізку *BD*. Очевидно, якщо точка *C* лежатиме нижче точки *A*, то конструкція під дією сили ваги $\overline{P}$ буде завжди повертатись із нахиленого положення до вертикального, тобто буде стійкою при перекиданні.

Відлік координати *y* будемо вести від точки D. Для визначення координати центра ваги об’єму використаємо спосіб розбиття. Конусу надамо індекс 1, півкулі – 2. Тоді згідно з формулою (9.12)

$$y_C = \frac{y_1 V_1 + y_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

Для конуса $y_1 = R + \frac{1}{4}h, \quad V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h$,

Для півкулі $y_2 = R - \frac{3}{8}R = \frac{5}{8}R, \quad V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3.$

Тоді

$$y_C = \frac{(R+\frac{1}{4}h)\frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{5}{8}R\frac{2}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{(R+\frac{1}{4}h)h + \frac{5}{4}R^2}{h+2R} =$$

$$= \frac{Rh + \frac{1}{4}h^2 + \frac{5}{4}R^2}{h+2R} = \frac{4Rh + h^2 + 5R^2}{4h+8R}.$$

Для того, щоб точка *C* лежала нижче точки *A*, повинна виконуватись умова:

$$y_C < R,$$

тоді з урахуванням виразу для y_C :

$$\frac{4Rh + h^2 + 5R^2}{4h + 8R} < R,$$

або $4Rh + h^2 + 5R^2 \quad < \quad 4Rh + 8R^2$.

Звідси отримаємо умову

$$h^2 < 3R^2,$$

або

$$h < 1{,}73R. \qquad (9.23)$$

При виконанні геометричної умови (9.23) розглядуване тіло буде стійким при перекиданні.