

Момент сили відносно точки

Силовий фактор, під дією якого тіло може здійснювати обертальний рух, називається *моментом сили відносно точки* (полюса). Це фізичне поняття.

З математичної точки зору момент сили $\vec{F}$ відносно точки O (рис. 4.1) визначається вектором $\vec{M}_0(\vec{F})$, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}_A$ точки A прикладання сили на її вектор $\vec{F}$:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}. \quad (4.1)$$

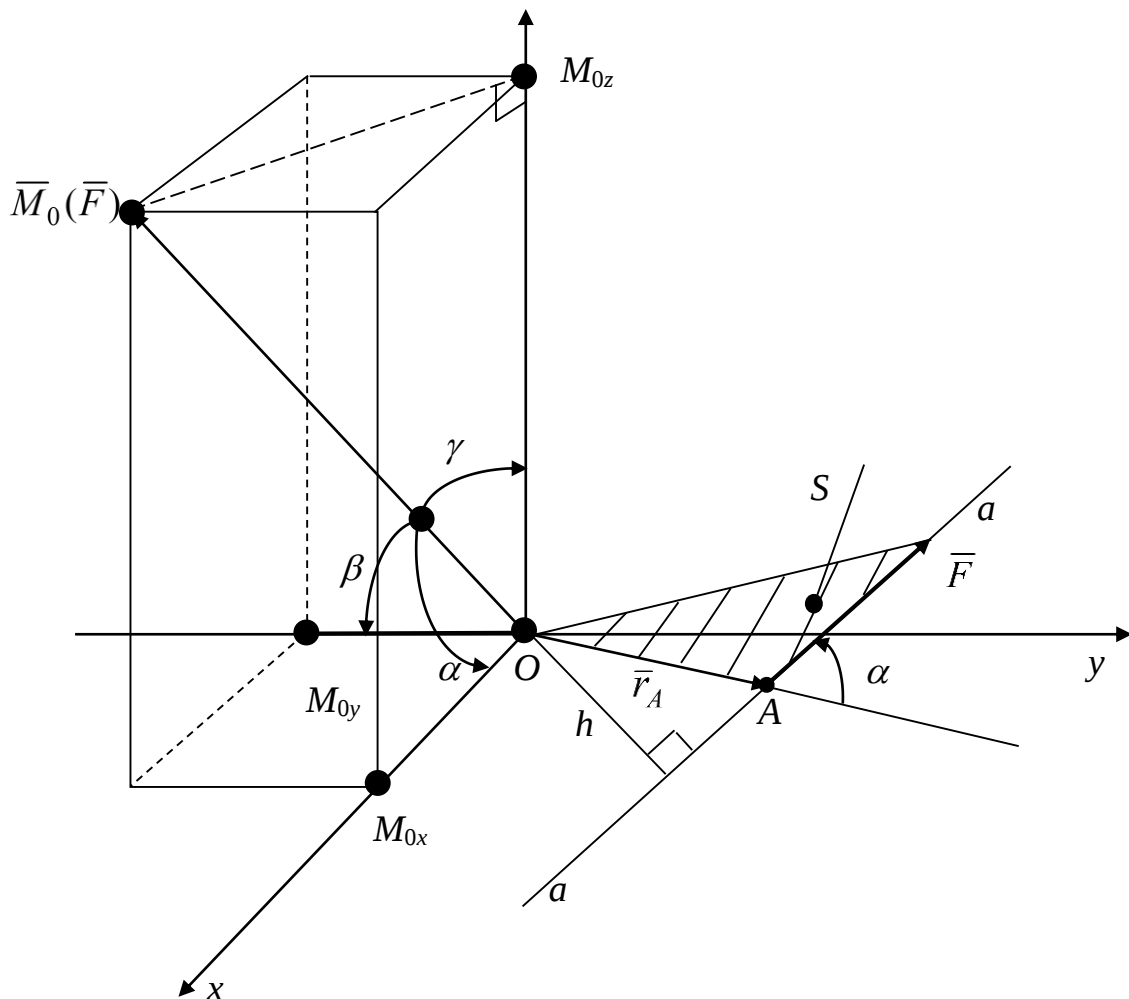


Рис. 4.1

Отже, враховуючи поняття і визначення векторної алгебри, отримаємо наступні властивості моменту сили відносно точки:

- момент сили відносно точки O є зв'язаним у точці вектором, який напрямлений перпендикулярно до площини S , що проходить через точку O і

лінію дії a -а сили $\vec{F}$, у той бік, звідки обертання тіла під дією сили навколо точки видно проти ходу стрілки годинника;

- в координатній формі момент сили обчислюється так:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y) \cdot \vec{i} + (zF_x - xF_z) \cdot \vec{j} + \\ + (xF_y - yF_x) \cdot \vec{k} = M_{0x} \cdot \vec{i} + M_{0y} \cdot \vec{j} + M_{0z} \cdot \vec{k}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де $\vec{r}_A = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$; M_{0x} ; M_{0y} ; M_{0z} – проекції моменту сили відносно точки O на осі системи координат (рис. 4.1);

- основною одиницею вимірювання моменту сили відносно точки є 1 Н·м;

- за величиною момент сили дорівнює модулю вектора $\vec{M}_0(\vec{F})$:

$$M_0(\vec{F}) = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2},$$

або
$$M_0(\vec{F}) = |\vec{M}_0(\vec{F})| = |\vec{r}_A \times \vec{F}| = r_A \cdot F \cdot \sin \alpha = hF, \quad (4.3)$$

де $h = r_A \cdot \sin \alpha$ - плече сили $\vec{F}$ відносно точки O , тобто довжина перпендикуляра, який опущено (рис. 4.1) з точки O на лінію дії a -а сили $\vec{F}$;

- відповідно до формули (4.3) момент сили відносно полюса дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через даний полюс (при цьому плече сили $h = 0$);

- момент сили відносно точки умовимося вважати додатним (вектор $\vec{M}_0(\vec{F})$ моменту сили на рис. 4.2,а спрямуємо перпендикулярно до горизонтальної площини S вертикально догори) у випадку, якщо сила намагається викликати обертання тіла (або плеча h навколо точки) проти ходу стрілки годинника, і від'ємним – навпаки (рис. 4.2,б).

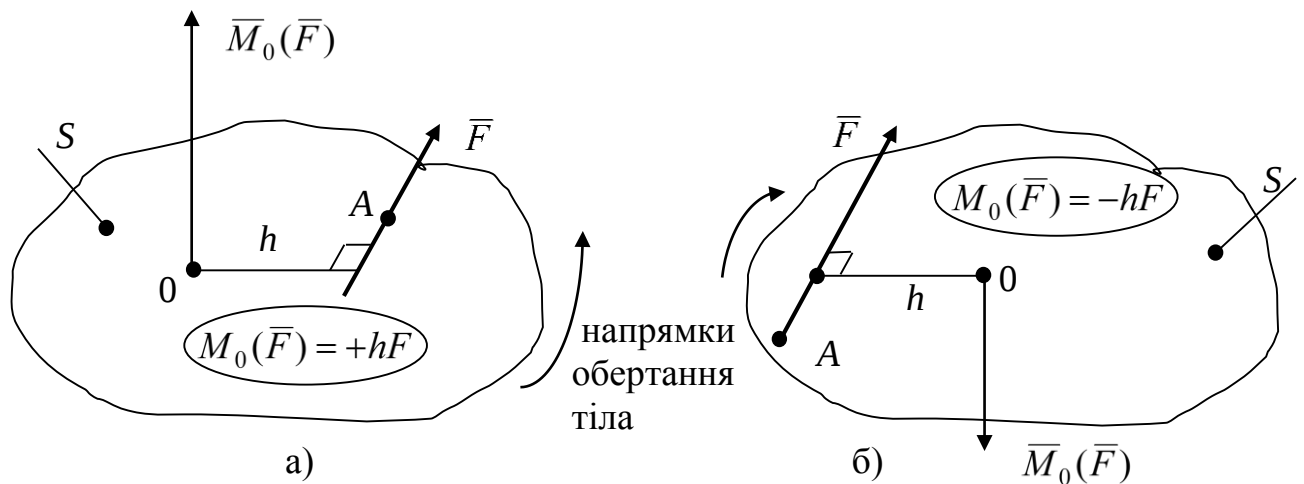


Рис. 4.2

Момент сили відносно осі

Момент сили відносно осі характеризує обертальну дію сили навколо даної осі. Ним називається проекція на цю вісь вектора $\bar{M}_0(\bar{F})$ моменту сили відносно точки O , що лежить на цій осі (рис. 4.1).

Відповідно до схеми на рис. 4.1 і виразу (4.2) моменти сили $\bar{F}$ відносно координатних осей Ox, Oy і Oz будуть визначитися так:

$$M_{0x}(\bar{F}) = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \alpha; \quad M_{0y}(\bar{F}) = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \beta; \quad M_{0z}(\bar{F}) = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \gamma$$

або $M_{0x} = yF_z - zF_y; \quad M_{0y} = zF_x - xF_z; \quad M_{0z} = xF_y - yF_x.$

На практиці момент сили відносно осі звичайно визначають за наступними правилом:

- проводять площину S , перпендикулярну до осі Oz , і знаходять точку O перетину осі з площиною (рис. 4.3);
- проектують задану силу $\bar{F}$ на зазначену площину, отримуючи силу $\bar{F}_s$;
- обчислюють момент сили $\bar{F}_s$ відносно точки O перетину площини S з віссю Oz , враховуючи наведені в розд. 4.2 його властивості: $M_0(\bar{F}_s) = \pm hF_s$;
- момент заданої сили $\bar{F}$ відносно осі Oz визначають за формулою

$$\bar{M}_{0z}(\bar{F}) = \bar{M}_0(\bar{F}_s).$$

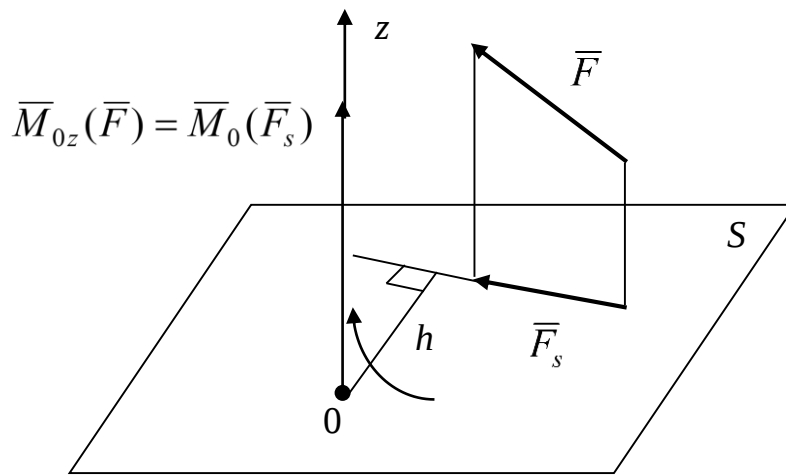


Рис. 4.3

На рис. 4.3 момент $\bar{M}_{0z}(\bar{F})$ - координатна складова $\bar{M}_{0z}$ вектора моменту сили відносно точки O , який згідно з (4.2) дорівнює: $\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{M}_{0x} + \bar{M}_{0y} + \bar{M}_{0z}$.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

- сила паралельна осі (в цьому випадку проекція сили $\bar{F}$ на площину S дорівнює нулю: $\bar{F}_s = 0$);
- лінія дії сили перетинає вісь (при цьому плече $h = 0$).

4.3. Алгебраїчний момент сили відносно точки

При розв'язанні задач статки у площині при складанні рівнянь моментів використовують поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки.

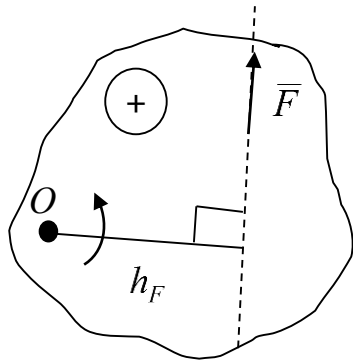
Алгебраїчним моментом сили відносно точки називається взятий з відповідним знаком добуток плеча на модуль сили. Береться знак "+", якщо сила намагається повернути плече проти ходу стрілки годинника.

Таким чином, для визначення алгебраїчного моменту сили відносно точки треба виконати такі дії (рис. 4.4,а,б):

- 1) провести лінію дії сили;
- 2) з вибраної точки опустити перпендикуляр до лінії дії сили (довжина перпендикуляра h – плече сили);

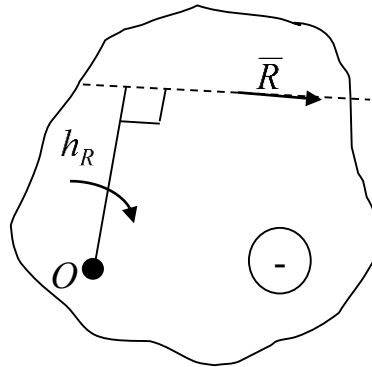
3) скласти добуток плеча на модуль сили;

4) взяти знак “+”, якщо сила намагається повернути плече відносно вибраної точки проти ходу стрілки годинника (рис. 4.4,а) і знак “-” – за ходом стрілки годинника (рис. 4.4,б).



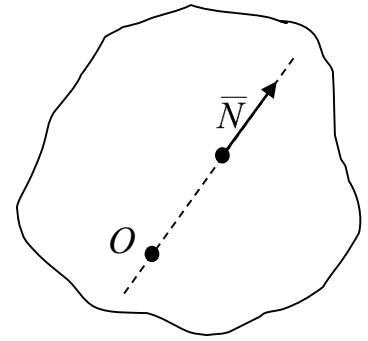
$$M_0(\bar{F}) = +F \cdot h_F$$

а



$$M_0(\bar{R}) = -R \cdot h_R$$

б



$$M_0(\bar{N}) = 0$$

в

Рис. 4.4

Окремий випадок (рис. 4.4,в): алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку (тут плече $h = 0$).

Зрівнюючи правила визначення алгебраїчного моменту сили відносно точки і моменту сили відносно осі, робимо висновок, що алгебричний момент сили відносно точки є не чим іншим, як моментом сили відносно осі, яка проходить через точку перпендикулярно до площини рисунка і напрямлена до спостерігача.