

ВНУТРІШНІ СИЛИ (ЗУСИЛЛЯ). МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ

Взаємодія елементарних частинок тіла, що спричинена діючим на тіло навантаженням, обумовлена внутрішніми силами. Ці сили забезпечують збереження форми і розмірів тіла. При дії зовнішніх сил у тілі виникають внутрішні сили, що характеризують його спроможність чинити опір зовнішнім навантаженням. Ці внутрішні сили є предметом вивчення опору матеріалів. Їх називають внутрішніми зусиллями.

Внутрішні зусилля визначаються методом перерізів, суть якого роздивимося на такому прикладі.

Тіло, що під дією зовнішнього навантаження знаходиться у стані статичної рівноваги, умовно розсічемо на дві частини перерізом, внутрішнє зусилля в якому необхідно визначити (рисунок 1.5 а). Умовно відкинемо будь-яку частину тіла по одну сторону від перерізу. Дію відкинутої частини тіла на частину, що залишилася, замінимо відповідними внутрішніми зусиллями (рисунок 1.5 б).

Будь-яка система внутрішніх зусиль, що діють у перерізі, може бути зведена до головного вектора сил $\vec{R}$, наприклад, прикладеного в центрі ваги перерізу, і головного моменту $\vec{M}$ відносно центру ваги перерізу (рисунок 1.5 в).

Оскільки все тіло знаходиться в стані статичної рівноваги, то й відсічена частина повинна бути врівноважена. Стосовно відсіченої частини перерізу внутрішні зусилля поряд з іншими зовнішніми силами входять у рівняння рівноваги і можуть бути визначені з них.

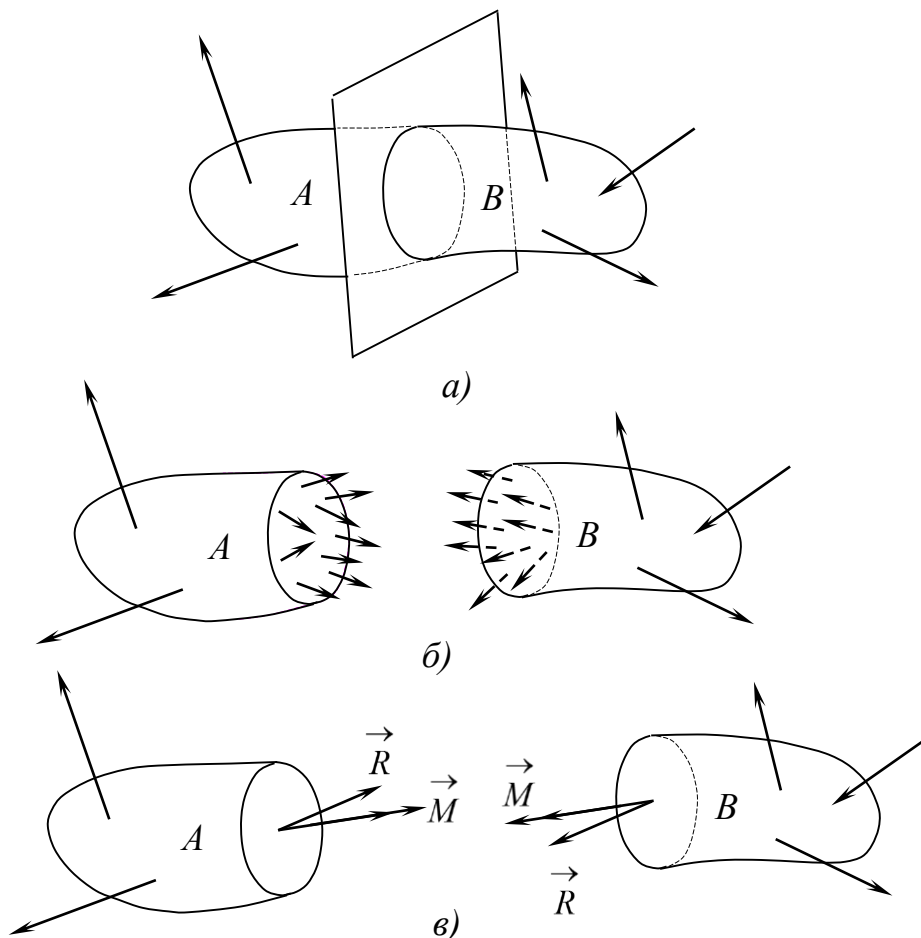


Рисунок 1.5 – Внутрішні зусилля в перерізі навантаженого тіла

Відповідно до закону Ньютона в цьому ж перерізі відкинutoї частини тіла діють такі ж внутрішні зусилля, але спрямовані протилежно.

Більш докладно розглянемо визначення внутрішніх зусиль у стержнях (рисунок 1.6). Розсічемо стержень, навантажений урівноваженою системою зовнішніх навантажень $F_1 \dots F_n$, поперечним перерізом (рисунок 1.6 а). Прийmemo для стержнів таке розташування координатних осей: вісь z направимо вздовж поздовжньої осі стержня, осі x і y - перпендикулярно до неї (рисунок 1.6 б). Якщо поперечний переріз стержня має осі симетрії, то осі x і y , відповідно, співпадають з осями симетрії. Зусилля, як правило, визначаються для поперечних перерізів, перпендикулярних поздовжньої осі z .

Для зручності визначення внутрішніх зусиль розкладемо головний вектор $\vec{R}$ і головний момент $\vec{M}$ на складові по осям координат:

$$\vec{R} = \vec{Q}_x + \vec{Q}_y + \vec{N}; \quad \vec{M} = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_k. \quad (1.1)$$

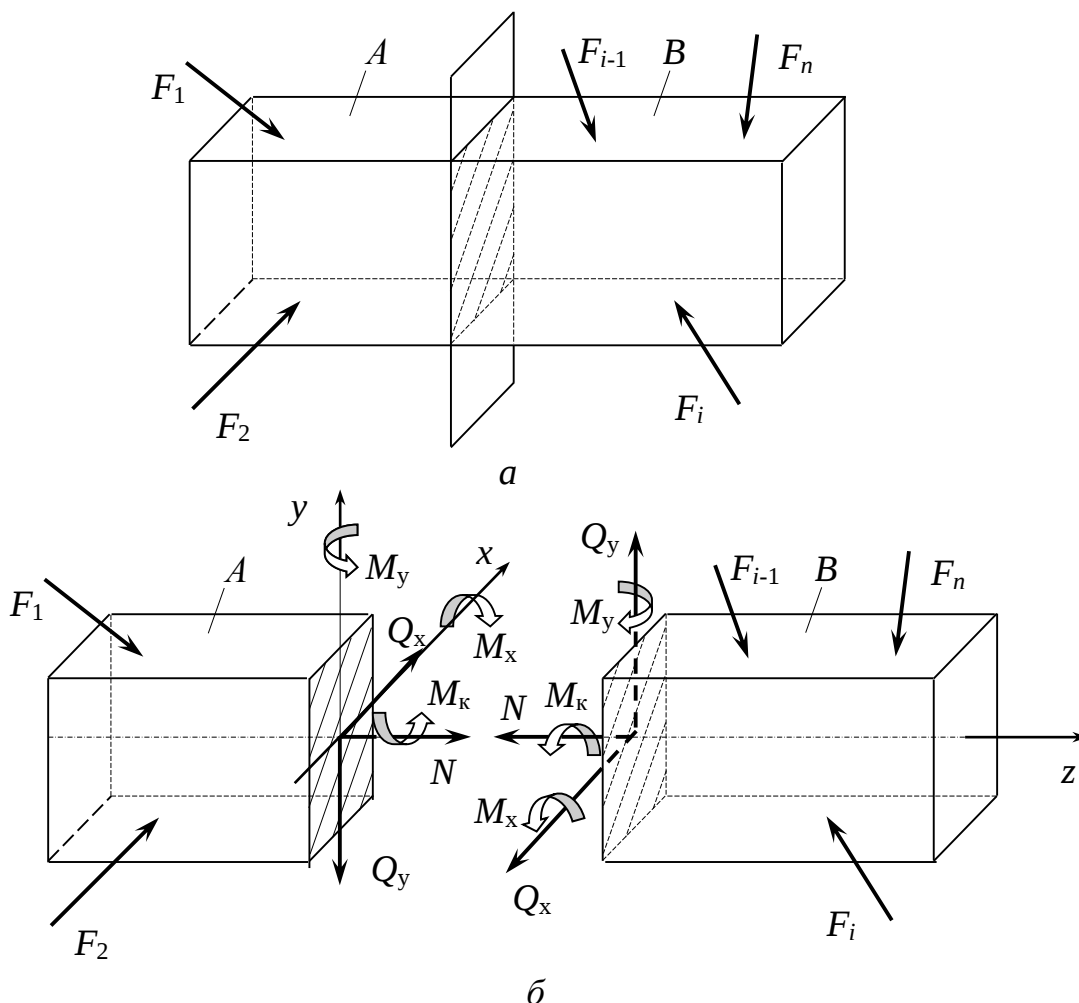


Рисунок 1.6 – Внутрішні зусилля в перерізі навантаженого стержня

Для спрощення на рисунку 1.6 не показані вектори $\vec{R}$ і $\vec{M}$, а замість складових $\vec{M}_x, \vec{M}_y, \vec{M}_k$ зазначені тільки напрямки їхньої дії.

Складові головного вектора сил і головного моменту називаються внутрішніми силовими факторами і мають свої назви, пов'язані з деформаціями:

Q_x, Q_y – поперечні (перерізуючі) зусилля; N – поздовжнє зусилля;

M_x, M_y – згинаючі моменти; M_k – крутячий момент.

Силкові фактори в перерізі стержня можна визначити з умов рівноваги відсіченої частини стержня (з рівнянь статки):

$$\begin{aligned} 1) \sum F_i^z = 0; \quad 2) \sum F_i^x = 0; \quad 3) \sum F_i^y = 0; \\ 4) \sum M_i^z = 0; \quad 5) \sum M_i^x = 0; \quad 6) \sum M_i^y = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де $\sum F_i^z; \sum F_i^x; \sum F_i^y$ – суми проекцій зовнішніх сил на осі координат z, x і y , прикладених до стержня по одну сторону від перерізу;

$\sum M_i^z; \sum M_i^x; \sum M_i^y$ – суми моментів зовнішніх сил щодо осей координат x, y і z , прикладених до стержня по одну сторону від перерізу.

З першого рівняння умов рівноваги (1.2) визначається поздовжнє зусилля N ; з другого і третього рівнянь – відповідно поперечні зусилля Q_x і Q_y ; з четвертого рівняння – крутячий момент M_k ; з п'ятого і шостого рівнянь – відповідно згинаючі моменти M_{zg}^x і M_{zg}^y .

2.1 Види деформації стержнів

Внутрішні зусилля в різних перерізах тіла неоднакові. Деформування того чи іншого елемента залежить від того, які зусилля на нього діють. Якщо в поперечному перерізі виникає лише один внутрішній силковий фактор, то такий випадок деформації називають простим видом деформації. До простих видів деформацій відносять: розтяг (стиск), зсув (зріз), кручення, чистий згин.

Розтяг (стиск) має місце тоді, коли на стержень діють зовнішні сили вздовж його осі. Тоді у його будь-яких поперечних перерізах виникає тільки поздовжнє зусилля N (рисунок 1.7 а, б). Зсув (зріз) виникає в тих випадках, коли в поперечному перерізі діє поперечне зусилля Q (рисунок 1.7 в). Під час кручення в будь-якому поперечному перерізі стержня виникає тільки крутячий момент M_k (рисунок 1.7 г). Чистий згин спостерігається, коли в поперечних перерізах стержня діє тільки згинальний момент M_{zg} (рисунок 1.7 д).

В тих випадках зовнішнього навантаження, коли в поперечному перерізі стержня одночасно діють декілька внутрішніх силкових факторів, говорять про складний вид опору стержня.

2.2 Напруження

Внутрішні силкові чинники є інтегральними характеристиками і не дозволяють судити про розподіл зусиль по перерізу. Тому по їхньому розміру неможливо порівняти умови навантаження елементів конструкцій різних розмірів, форми і різноманітного зовнішнього навантаження, що знаходяться під дією зовнішніх сил.

Для цього в опір матеріалів вводиться поняття напруження.

Виділимо у перерізі тіла в окрузі довільної точки K із координатами x і y (рисунок 1.8) елементарну площадку dA , на якій діє внутрішнє зусилля $d\vec{R}$. Розміри площадки приймемо такими, щоб зміною внутрішніх зусиль усередині її можна було знехтувати. Тоді рівнодіюча $d\vec{R}$ буде прикладена в центрі

площини. Силу $d\vec{R}$ розкладемо на нормальну складову dN (проекція на нормаль до площини) і дотичну складову dQ (проекція на площину перерізу).

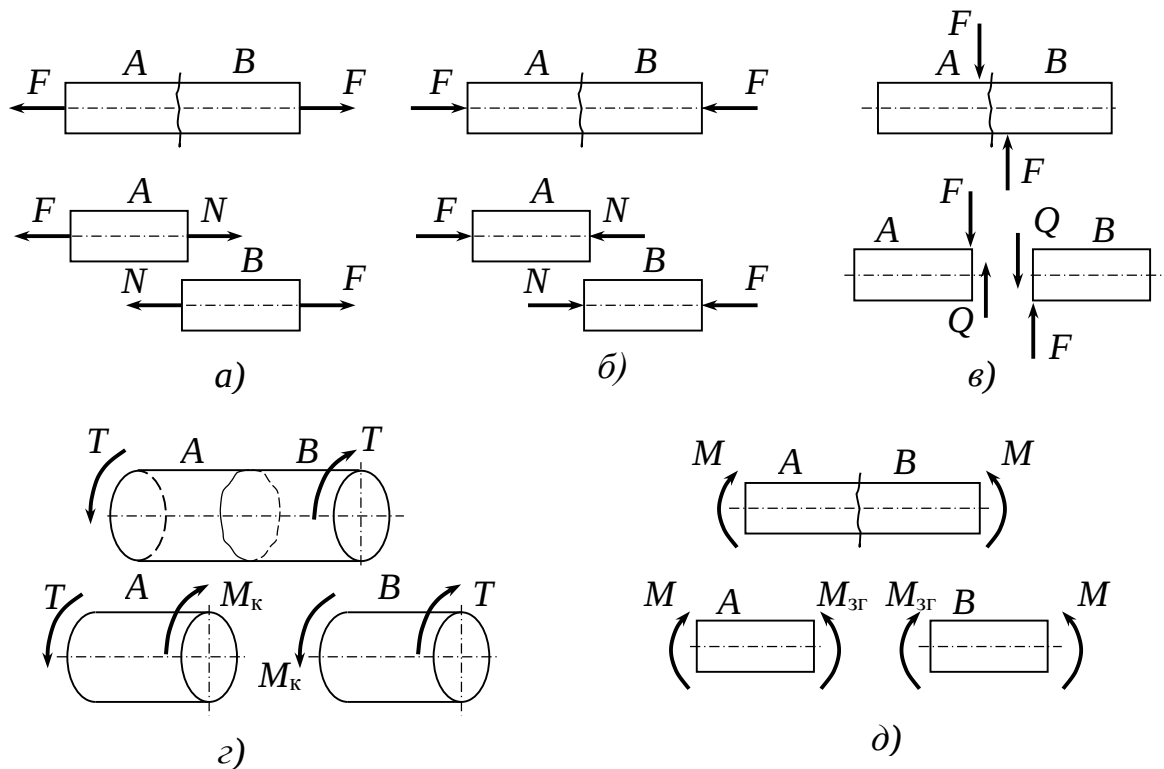


Рисунок 1.7 – Прості види деформації стержнів

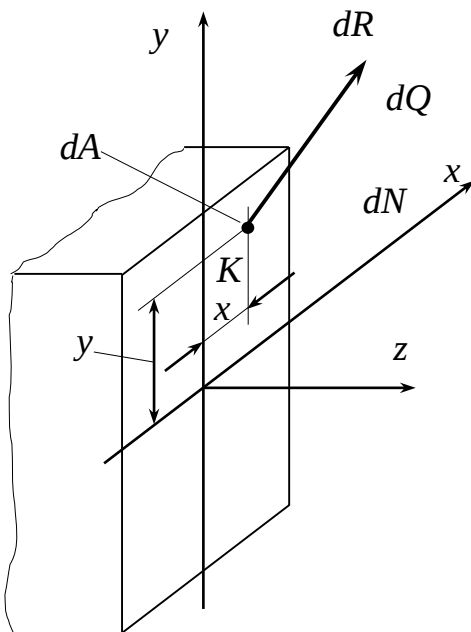


Рисунок 1.8 – Зусилля на елементарній площині перерізу стержня

Величина $p = \frac{dR}{dA}$ називається повним напруженням в даній точці аналізованого перерізу.

Аналогічно вводяться поняття нормального σ і дотичного τ напружень:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}; \quad \tau = \frac{dQ}{dA}.$$

При необхідності дотичне напруження τ в площині перерізу може бути розкладене на складові τ_x і τ_y .

Нормальне напруження в точці перерізу характеризує інтенсивність сил відриву або стиску часток тіла, розташованих по обох сторін від перерізу, а дотичне напруження – інтенсивність сил, що зрушують ці частки в площині перерізу.

Повне, нормальне і дотичне напруження пов'язані залежністю

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.3)$$

Напруження чисельно дорівнює внутрішній силі, що діє на одиницю площі в даній точці. Розмірність напруження $1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1 \text{ Па} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}$.

Підсумовуючи по перерізу тіла елементарні внутрішні нормальні сили σdA і дотичні сили τdA і їхні елементарні моменти щодо осей x , y і z , одержимо залежності, що зв'язують напруження і внутрішні зусилля

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_A \tau_x dA; & M_x &= -\int_A \sigma y dA; \\ Q_y &= \int_A \tau_y dA; & M_y &= -\int_A \sigma x dA; \\ N &= \int_A \sigma dA; & M_k &= \int_A (\tau_x y - \tau_y x) dA. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Розподіл напружень по перерізу не може бути знайденим з цих рівнянь, тому що число точок у перерізі нескінченно, а рівнянь – шість.

2.3 Допустимі напруження. Умова міцності

Напруження $\sigma_{\text{гран}}$ і $\tau_{\text{гран}}$, при яких відбувається руйнування матеріалу або виникають значні пластичні (залишкові) деформації називаються граничними. Їхні значення визначаються шляхом досліджень при іспиті матеріалу.

Щоб не припустити руйнування елементів конструкцій, виникаючі в елементах напруження σ і τ не повинні перевищувати допустимих напружень $[\sigma]$ або $[\tau]$.

Допустимі напруження $[\sigma]$ або $[\tau]$ – це максимальні або дотичні напруження, при яких забезпечується нормальна робота матеріалу. Вони задаються як деяка частина граничних напружень

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{гран}}}{[n]}; \quad [\tau] = \frac{\tau_{\text{гран}}}{[n]}, \quad (1.5)$$

де $[n]$ - допустимий коефіцієнт запасу міцності.

Коефіцієнт запасу міцності залежить від властивостей матеріалу, діючих навантажень, точності методу розрахунку, умов роботи.

Умови міцності по нормальним і дотичним напруженням мають вид

$$\sigma \leq [\sigma]; \quad \tau \leq [\tau], \quad (1.6)$$

де σ, τ – діючі (фактичні) напруження;
 $[\sigma], [\tau]$ – допустимі напруження.

2.4 Переміщення і деформації

Під дією зовнішніх навантажень точки тіла переміщуються, а самі тіла деформуються (змінюють свої розміри і форму). Як правило, переміщення і деформації незначні і можуть бути зафіксовані тільки за допомогою чутливих приладів - тензометрів.

Для характеристики деформації точок тіла вводять поняття відносної лінійної деформації і відносної кутової деформації.

Визначимо ці поняття на прикладі деформації тіла, зображеного на рисунку 1.9. Розглянемо точки A і B , до навантаження тіла розташовані друг від друга на відстані l . Після прикладення навантаження точки A і B перемістяться, відповідно, у положення A' і B' , а відстань між ними зміниться на величину Δl . Величина Δl є абсолютною лінійною деформацією відрізка AB . Вона вимірюється в одиницях довжини (м, мм, мкм і ін.).

Наближуючи точку B до A , спрямуємо довжину відрізка l до нуля.

Межа відношення абсолютної деформації відрізка до його початкової довжини називають відносною лінійною деформацією по напрямку AB

$$\varepsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.7)$$

Звичайно деформації тіла визначаються в напрямку координатних осей. Вони позначаються $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

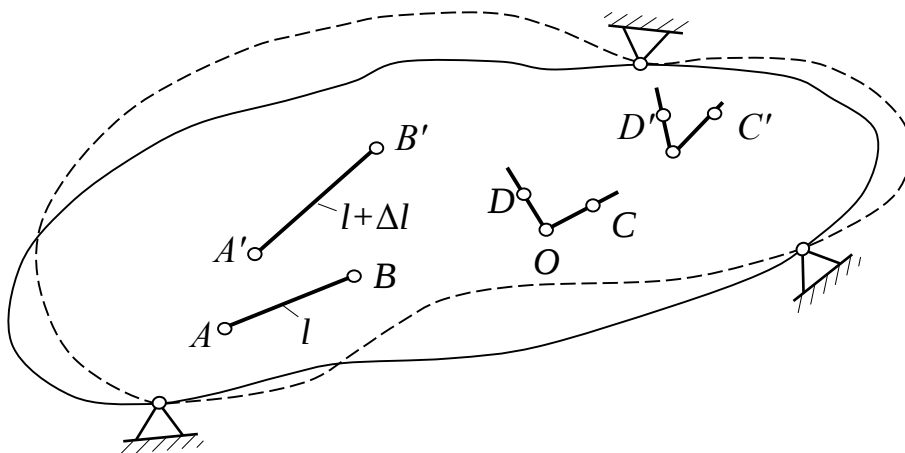


Рисунок 1.9 – Деформації в напруженому тілі

Розглянемо прямий кут $\angle COD$, утворений у недеформованому тілі відрізками OC і OD . Після прикладення навантаження кут буде $\angle C'O'D'$. Наближуючи точки C і D до O у межі одержимо величину зміни прямого куту $\angle COD$.

$$\gamma_{\angle COD} = \lim_{l \rightarrow 0} (\angle COD - \angle C'O'D'). \quad (1.8)$$

Ця зміна прямого куту, виражена в радіанах, називається відносною кутовою деформацією в точці A в площини утвореній відрізками OC і OD .

Звичайно відносні кутові деформації визначають у трьох взаємно перпендикулярних координатних площинах. Вони позначаються γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zy} .

2.5 Основні гіпотези опору матеріалів

Визначення напружень у точках перерізу тіла по відомих значеннях внутрішніх силових чинників - статично невизначена задача. Для її рішення рівняння статyki (1.4) доповнюють геометричними співвідношеннями - рівняннями деформацій.

Ці рівняння записуються на підставі ряду гіпотез (допущень) про властивості матеріалу і про характер деформацій. Ці такі гіпотези:

1. Гіпотеза суцільності матеріалу (матеріал суцільно заповнює форму тіла).
2. Гіпотеза про однорідність та ізотропність матеріалу (у будь-якому обсязі і напрямку властивості матеріалу однакові).
3. Гіпотеза про малість деформацій (деформації малі в порівнянні з розмірами тіла і ними можна знехтувати).
4. Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу. Матеріал має абсолютну пружність і для нього справедливий закон Гука, що виражає лінійну залежність між навантаженнями і деформаціями:
5. Принцип суперпозиції (незалежності дії сил - дозволяє визначити результат впливу на конструкцію декількох навантажень як суму результатів кожного навантаження окремо).
6. Принцип Сен-Венана (якщо в межах деякої області пружного тіла прикладена система сил, то на відстані, що істотно перевищує характерні розміри цієї області, напруження і деформації практично однакові для всіх статично еквівалентних систем сил).
7. Гіпотеза плоских перерізів (поперечні перерізи стержня, плоскі і нормальні до його поздовжньої осі до додатка до нього навантажень, залишаються плоскими і нормальними до поздовжньої осі і при дії навантаження).