**Визначений інтеграл**

**1.Поняття визначеного інтегралу.**

Нехай функція *f(x)* визначена на проміжку . Вважаємо для зручності, що функція *f(x)* на визначеному проміжку невід’ємна і . Розіб’ємо цей відрізок на частин точку *c1* і обчислимо суму:

Де Ця сума називається інтегральною сумою функції *f(x)* на відрізку

Y

*y=f(x)*

B

A f(c1)

a x1 ci xi  b X

Рис.1

Геометрично (рис.1) кожний додаток інтегральної суми дорівнює площі прямокутника з основою і висотою , а вся сума дорівнює площі фігури, яку отримали з’єднанням усіх вказаних вище прямокутників.

Очевидно, при всіх можливих розбиттях відрізка на частини отримаємо різні інтегральні суми, а значить різні східні фігури.

Будемо збільшувати число точок розбиття так, щоб довжина найбільшого з відрізків прямувала до нуля. В багатьох випадках при такому розбитті інтегральна сума буде прямувати до деякої кінцевої границі, не залежно від способу яким вибираються точки ділянки x1, ні від того, як пробираються проміжні точки c1.

Цю границю і називають визначеним інтегралом для функції *f(x)* на відрізку.

**Визначеним інтегралом** для функції називається границя, до якої прямує інтегральна сума при прямуванні до нуля довжини найбільшого часткового проміжку. Він починається символом і читається «інтеграл від *a* до *b* від функції до », або скорочено « інтеграл від *a* до *b* від».

За означенням

Число *а* називається нижньою межею інтегрування; число *b* – верхньою межею; відрізок – відрізком інтегрування.

Зазначимо, що будь-яка неперервна на проміжку функція має визначений інтеграл на цьому відрізку.

**2. Геометричний зміст визначеного інтеграла.**

Якщо інтегрована на відрізку функція невід’ємна, то визначений інтеграл чисельно дорівнює площі S криволінійної трапеції *aABb* (рис.1).

Уточнимо, що **криволінійною трапецією** називають фігуру, обмежену графіком неперервної функції , де , прямими та віссю OX.

Отже, геометричний зріст визначеного інтегралу – це площа криволінійної трапеції.

Розглянемо криволінійну трапецію CHKD(див.рис.2), в якої абсциса точки C рівна x, а точки . Графік функції перетинає вісь OY в точці A. Тоді площа криволінійної трапеції CHKD рівна різниці площ криволінійних трапецій OAKD і OAHC.

Y

M K

H E f(x+)

A

f(x) x x+

0 C D X

Рис.2

Оскільки площа криволінійної трапеції OAHC залежить від x, то її можна зобразити символом . Аналогічно, площа криволінійної трапеції CHKD є функцією від і її можна позначити . Тому площа криволінійної трапеції CHKD дорівнює різниці і та позначається символом .

Побудуємо два прямокутника CHED і CMKD. Площа першого дорівнює . Оскільки площа криволінійної трапеції CHKD не менша площі прямокутника CHED і не більша площі прямокутника CMKD, то можна записати нерівність:

Поділимо обидві частини цієї нерівності на та знайдемо границі виразів при :

*.*

Згадаємо, що і враховуючи неперервність функції ,

Отримаємо:

,

Звідси

,

тобто похідна площі криволінійної трапеції дорівнює функції, яка задає верхню межу трапеції.

Таким чином, площа криволінійної трапеції є однією з первісних функцій, яка задає верхню межу трапеції, і може бути визначена за допомогою інтегрування.

.

Остання рівність вірна для всіх x з проміжку [a;b]. Підставимо замість x число a. Отримаємо . Але , бо криволінійна трапеція перетворюється у відрізок, тому . Таким чином

*.*

При одержимо вираз для обчислення площі криволінійної трапеції

*.*

Отриманий вираз для обчислення S є приростом первісної на [a;b]. Оскільки первісні відрізняються лише на постійну, то очевидно, що всі вони матимуть одинаковий приріст на проміжку [a;b]. Звідси випливає ще одне означення визначеного інтегралу :

**визначеним інтегралом** називають приріст довільної первісної при зміні аргументу від a до b.

Дане означення записують у вигляді **формули Ньютона-Лейбніца**:

де – первісна для функції .

**3. Основні властивості визначеного інтеграла.**

Всі нижче приведені властивості сформульовані в припущенні, що дані функції інтегровані на відповідних проміжках.

1. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

2. При перестановці меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний:

3. Відрізок інтегрування можна розбивати на частини:

4. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

5. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа функції дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від функцій, що додаються:

Доведення властивостей базується на формулі Ньютона-Лейбніца. Як приклад, доведемо властивість 3:

що і треба було довести.

Дана властивість легко ілюструється графічно(рис.3)

Y

В

А

С

f(c)

0 а с b X

Рис.3.

або

З рис.3 легко побачити справедливість твердження **теореми про середнє.**

**Теорема.** Якщо функція неперервна на проміжку [], то існує точка , що належить даному проміжку, така, що

Тобто площа криволінійної трапеції рівна площі прямокутника з сторонами та .