

**Тема:** Показникова функція та її властивості

**Мета:**

- *Навчальна:* засвоїти означення показникової функції, властивості показникової функції, навчитися будувати графіки показникової функції; засвоїти властивості степенів з дійсним показником на основі властивості степенів з раціональним показником;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати графіки показникової функції та користуючись побудованими графіками аналізувати властивості показникової функції;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук, показати, де саме застосовують у житті властивості показникової функції;

**Компетенції:**

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

## Хід уроку

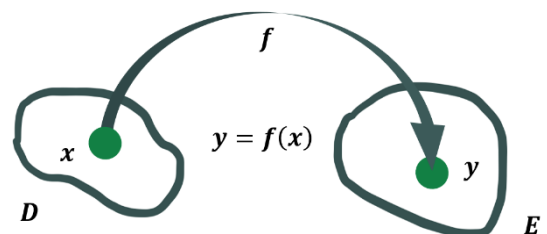
### I. Організаційний етап

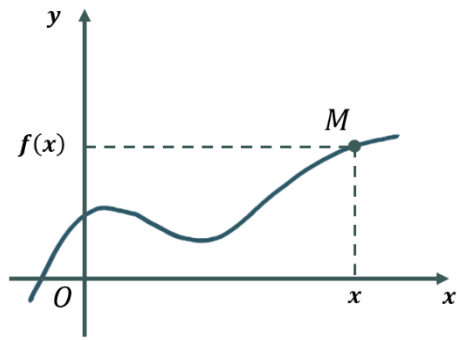
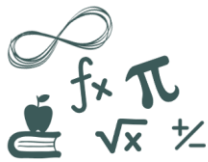
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

### II. Актуалізація опорних знань

- Числовою функцією називається....

Числовою функцією з областю визначення  $D$  називається залежність, при якій кожному числу  $x$  із множини  $D$  (області визначення) ставиться у відповідність єдине число  $y$ .  
 $x$  – аргумент (незалежна змінна),  
 $y$  – функція (залежна змінна)  
 $f$  – функція  
 $f(x_0)$  – значення функції  $f$  у точці  $x_0$





- Графіком функції називається...  
Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини з координатами  $(x; f(x))$ .
- Область визначення функції...  
Область значень функції  $f$  – це множина тих значень, яких може набувати аргумент  $x$ .  
Позначення:  $D(f)$

- Область значень функції...  
Область значень функції  $f$  – це множина, яка складається із всіх чисел  $f(x)$ , де  $x$  належить області визначення. Її позначають  $E(f)$ .
- Функція зростаюча, якщо...  
Функція  $f(x)$  називається зростаючою на множині  $M$ , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції.
- Функція спадає, якщо...  
Функція  $f(x)$  називається спадною на множині  $M$ , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції.

- Які існують типи чисел?

### Натуральні числа (лат. «natura» - природа)

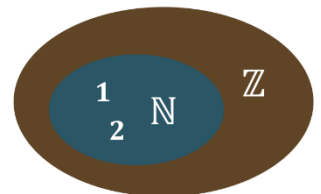
Натуральні числа – числа, що виникають природним чином при лічбі.



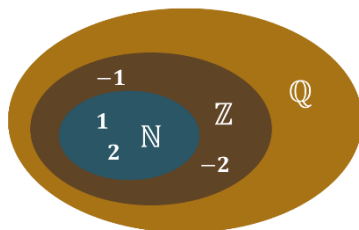
- Наведіть приклади натуральних чисел (1,2,3 ...)

### Цілі числа

Цілі числа – це натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль.



- Наведіть приклади цілих чисел  $(-2, -1, 0, 1, 2)$



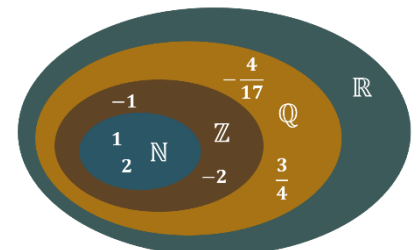
### Раціональні числа

Раціональні числа – додатні числа (цілі та дробові), від'ємні числа (цілі та дробові), число нуль.

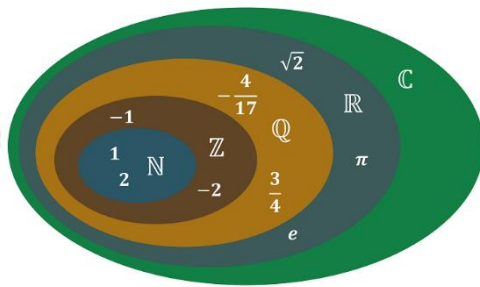
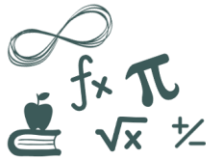
- Наведіть приклади раціональних чисел  $(-\frac{4}{17}; \frac{3}{4})$

### Дійсні числа

Множина раціональних та ірраціональних чисел (числа, які не можуть бути виражені за допомогою відношення цілих чисел, їх можна виразити за допомогою нескінченних неперіодичних десяткових дробів)



- Наведіть приклади дійсних чисел  $(\sqrt{2}, \pi, e)$



### Комплексні числа

Комплексні числа можна подати у вигляді як формальну суму  $x + iy$ ,  $x$  і  $y$  – дійсні числа,  $i$  – уявна одиниця ( $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$ )

➤ Наведіть приклади комплексних чисел ( $1 + i\sqrt{3}$ )

➤ Чи існують інші типи чисел?



Кватерніони й октоніони є прикладами гіперкомплексних чисел.

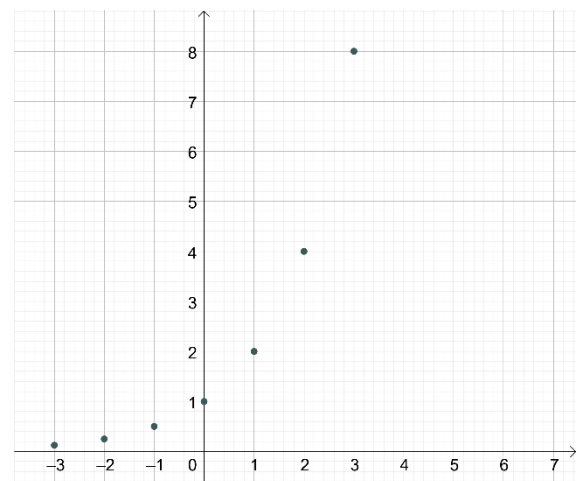
### III. Вивчення нового матеріалу

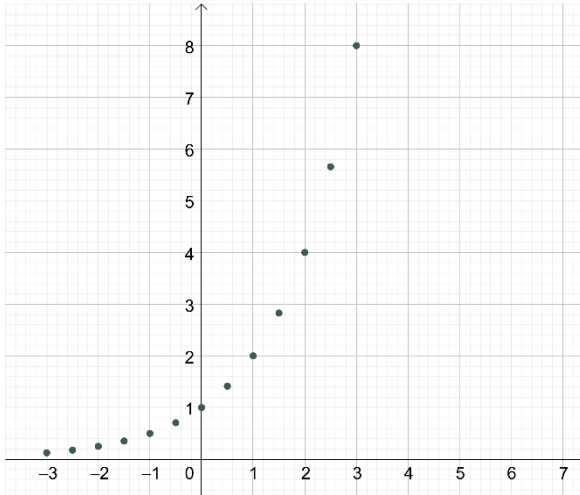
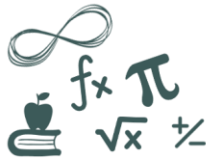
- Показникова функція

Функція виду  $y = a^x$   $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$  називається **показниковою**.

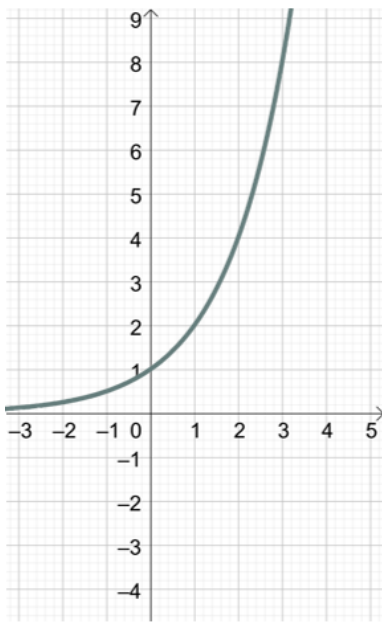
Наприклад:  $y = 2^x, y = 0,3^x, y = (\sqrt{2})^x$

Побудуємо  $y = 2^x$  для деяких цілих значень.





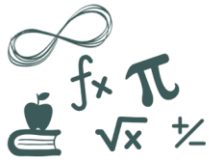
Тепер на цьому ж графіку побудуємо деякі дробові значення функції  $y = 2^x$



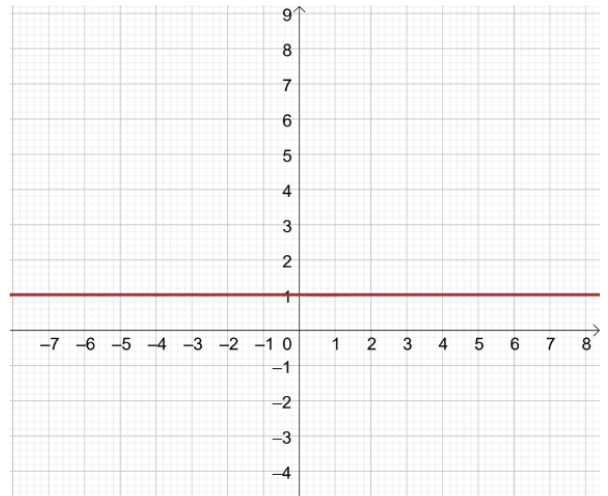
Якщо побудуємо всі значення з множини  $x \in \mathbb{R}$ , то отримаємо графік показникової функції  $y = 2^x$  (можливий інший запис, наприклад:  $g(x) = 2^x$ ).

*\*Кожна точка цього графіка є степенем числа 2 з дійсним показником  $x$ .*

- Чи існує функція при  $a = 1$ ?



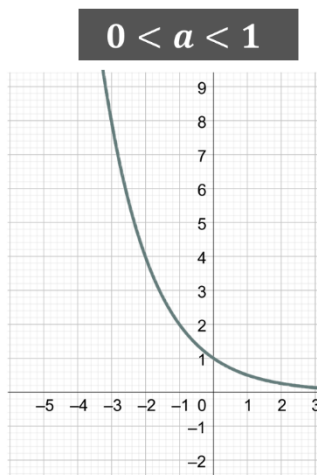
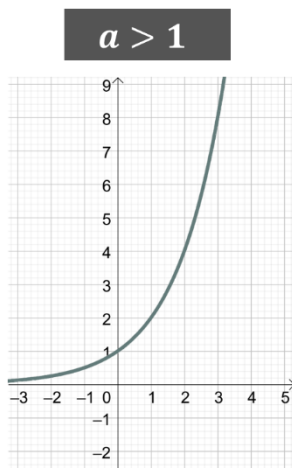
- Існує, але це вже буде не показникова функція. Графіком такої функції є пряма.



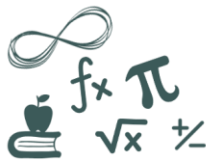
- Чи може отриманий графік показникової функції перетнути вісь абсцис?
- Ні, навіть якщо ми візьмемо від'ємний показник степеня, то завжди отримаємо додатне значення ( $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ;  $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ )  
Отже, **вісь  $x$  є асимптотою цього графіка.**

\**Асимптота кривої* (грец. ασυμπτωτος — що не збігається, не дотикається) — це пряма, до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько.

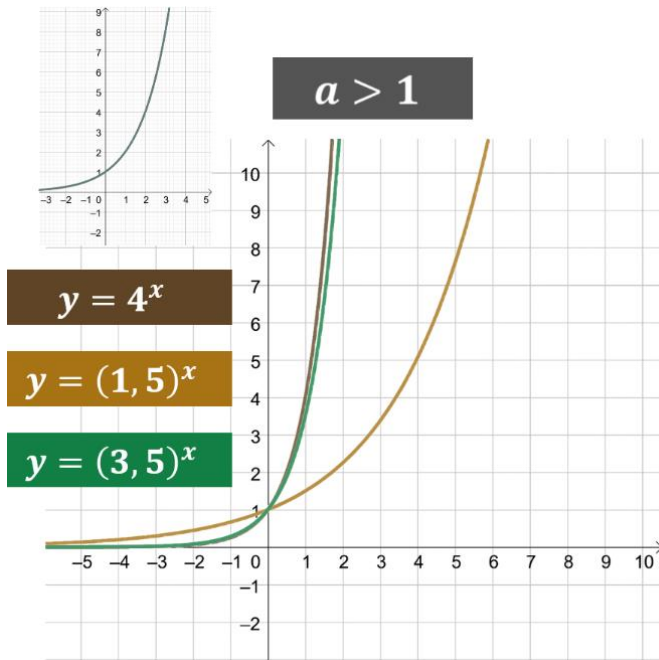
Проаналізуємо графіки показникової функції при  $a > 1$  і  $0 < a < 1$ :



- Що можемо сказати про ці функції на перший погляд?  
(при  $a > 1$  функція зростаюча,  
при  $0 < a < 1$  функція спадна)

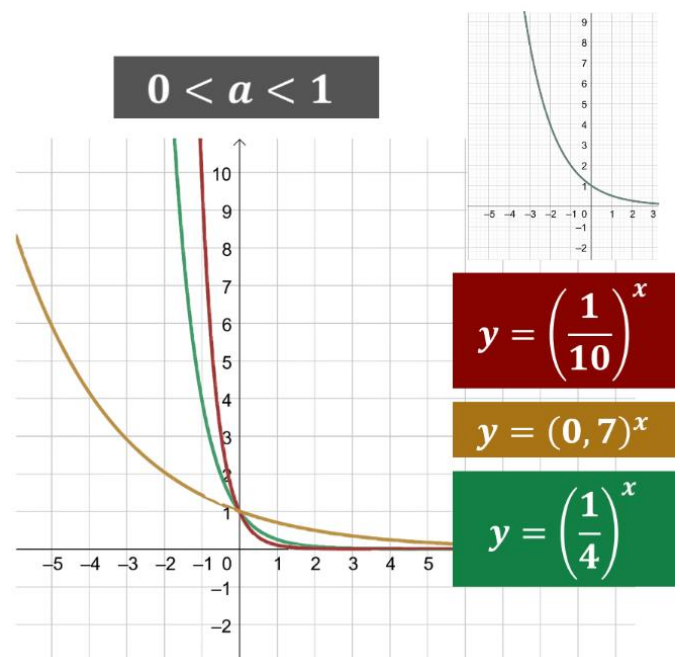


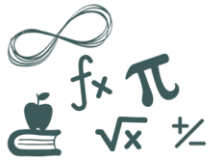
Побудуємо деякі графіки функцій  $y = a^x$  при  $a > 1$  і  $0 < a < 1$



Чим більшою є основа  $a > 1$ , тим крутіше «піднімається» графік функції  $y = a^x$ , якщо рухатися вправо.

Чим меншою є основа  $0 < a < 1$ , тим крутіше «піднімається» графік функції  $y = a^x$ , якщо точка рухається вліво.





- Пригадаємо властивості степеня з раціональним показником.

$a^x a^y = a^{x+y}$
$a^x : a^y = a^{x-y}$
$(a^x)^y = a^{xy}$
$(ab)^x = a^x b^x$
$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Всі ці властивості справедливі для  $a > 0$ ,  $b > 0$  та будь-яких дійсних  $x$  і  $y$

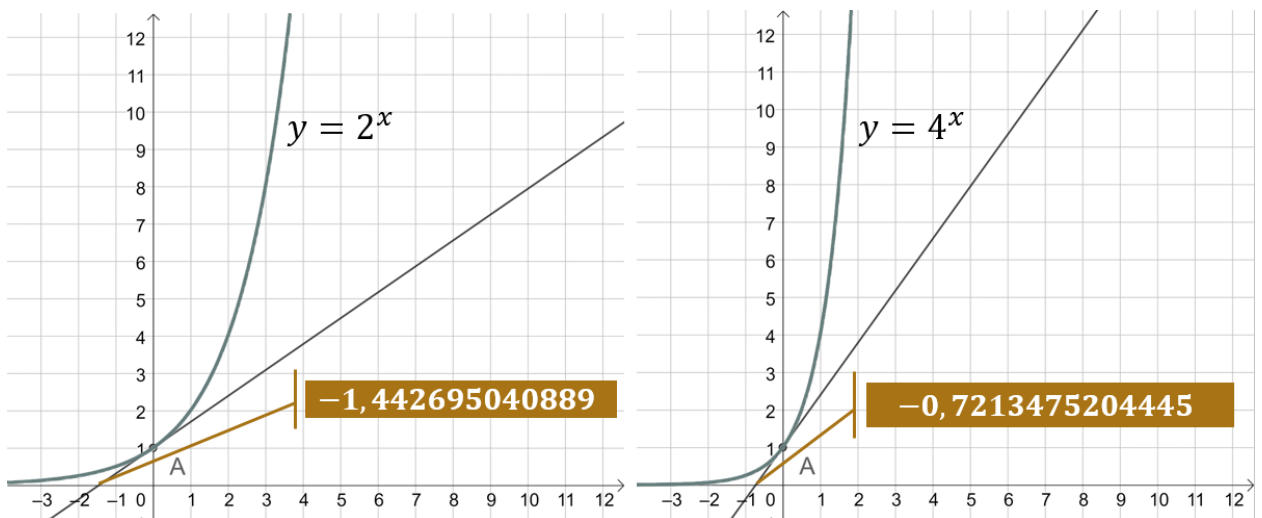
- **Властивості показникової функції**

1.  $D(f) = \mathbb{R}$  (Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел)
2.  $E(f) = (0; \infty)$  (Областю значень показникової функції є множина  $(0; \infty)$ )
3.  $y > 0$  при всіх значеннях  $x \in \mathbb{R}$  (Показникова функція немає нулів, і проміжок  $(-\infty; +\infty)$  є проміжком її знакосталості)
4. При  $a > 1$  зростаюча (При  $a > 1$  зростає на всій області визначення)  
При  $0 < a < 1$  спадна (При  $0 < a < 1$  спадає на всій області визначення)

- **Цікаво**

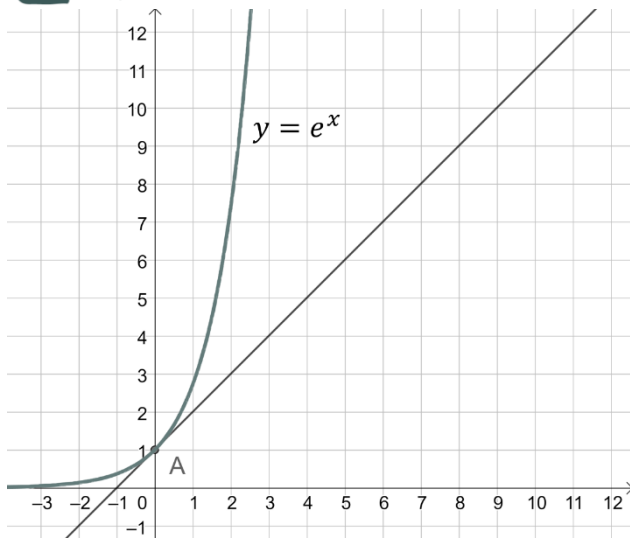
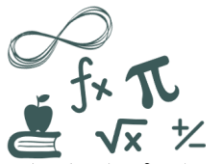
Розглянемо графіки показникових функцій  $y = 2^x$  і  $y = 4^x$ .

У них кутівий коефіцієнт дотичної проведеної в точці  $A(0; 1)$  до графіка менший за одиницю або більший за одиницю.



- Чи існує така показникова функція, щоб кутівий коефіцієнт дотичної до її графіка в т.  $A(1; 0)$  дорівнював 1?





Якщо за основу показникової функції взяти ірраціональне число  $e = 2,71828 \dots$

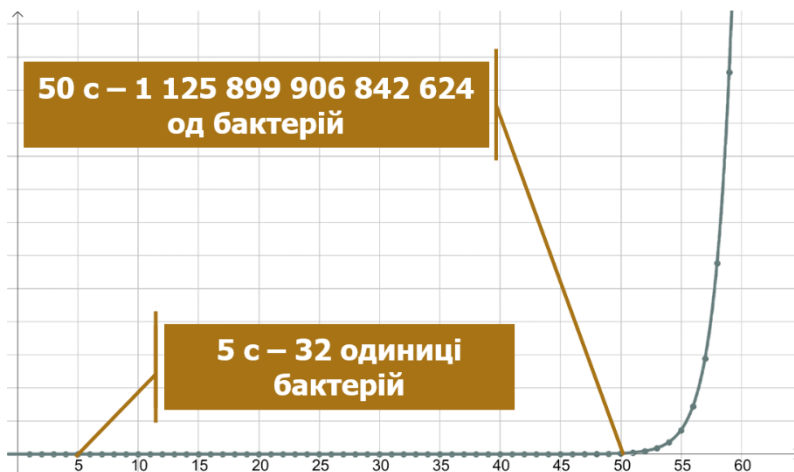
Така показникова функція називається **експонентою**.

- Чому графік кожної показникової функції обов'язково проходить через точку  $A(0; 1)$ ?

$$y = a^x \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow a^0 = 1$$

- **Процеси, що описує показникова функція**

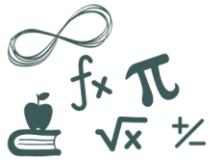
Показникова функція описує значну кількість процесів, що відбуваються в природі. Наприклад, зростання кількості бактерій за сприятливих для них умов існування можна описати за законом  $N = 5^t$  ( $t$  – час дослідження,  $N$  – кількість бактерій у колонії).



- Як людина використовує ріст і розмноження бактерій? (Виробництво антибіотиків, кисломолочних продуктів, виноробство, медицина)

- Зростання кількості деревини можна порахувати за законом  $A = A_0 \cdot a^{kt}$  ( $A_0$  – початкова кількість деревини,  $A$  – кількість деревини через час  $t$ ,  $k$  і  $a$  – сталі)





- Зменшення маси речовини під час радіоактивного розпаду відбувається за законом  $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$  ( $M_0$  – початкова маса речовини,  $M$  – маса в момент часу  $t$ ,  $T$  – період напіврозпаду речовини (час розпаду половини атомів заданої речовини))
- Зменшення тиску повітря з висотою відбувається за законом  $p = p_0 \cdot a^{-kh}$  ( $p_0$  – тиск на рівні моря,  $p$  – тиск на висоті  $h$ , а  $k$  – сталі)

### IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Яка з даних функцій є показниковою:

1) $y = x^6$	2) $y = \sqrt[6]{x}$
3) $y = 6^x$	4) $y = 6$

№2

Грунтуючись на які властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$	2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$ ?
--	--

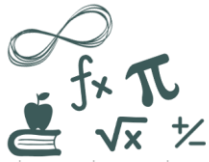
**Відповідь:** При  $a > 1$  показникова функція є зростаючою, при  $0 < a < 1$  – спадною.

№3

Побудуйте графік функції  $y = 3^x$ . У яких межах змінюється значення функції, коли  $x$  зростає від  $-1$  до  $3$  включно?

**Розв'язок:**

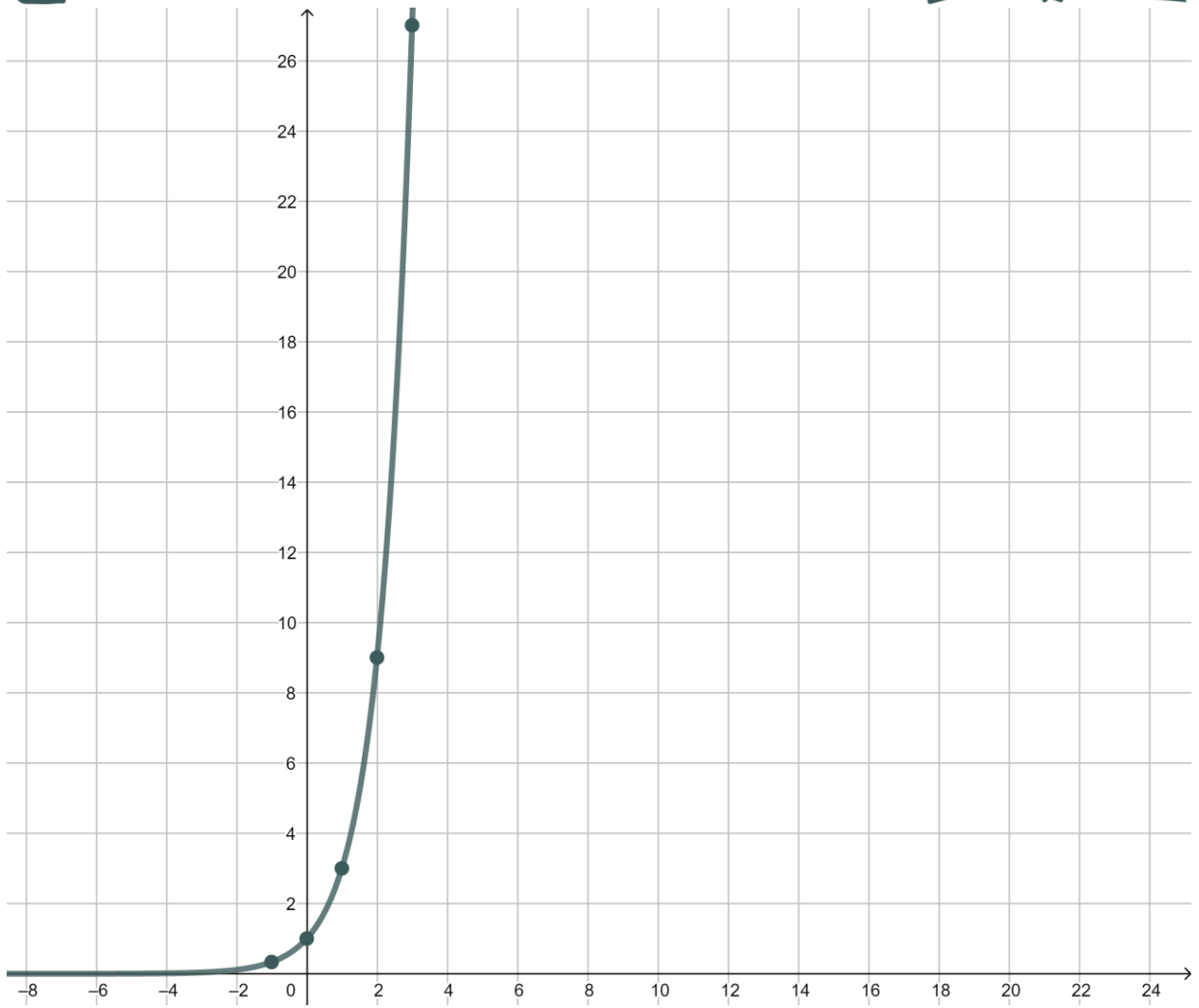
$x$	-1	0	1	2	3
$3^x$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27



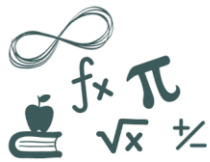
# Математика НОВА

## АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС

Рівень стандарту



**Відповідь:** значення функції змінюється від  $\frac{1}{3}$  до 27.



Порівняйте:

1) $5^{3,4} > 5^{3,26}$	2) $0,3^{0,4} < 0,3^{0,3}$	3) $\left(\frac{5}{4}\right)^0 < \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$
4) $0,17^{-3} > 0,17^0$	5) $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}} < \sqrt{2}^{\sqrt{7}}$	6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$

№5

Обчисліть значення виразу:

1)  $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$

**Розв'язок:**

$$3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}+1} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^3 = 27$$

2)  $\left(\left(3^{\sqrt{7}}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

**Розв'язок:**

$$\left(\left(3^{\sqrt{7}}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(3^{\sqrt{7}}\right)^3 = 3^3 + \left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 27 \cdot 7 = 189$$

3)  $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$

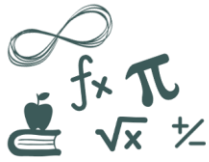
**Розв'язок:**

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}} &= \sqrt[3]{6^{5+2\sqrt{5}+1} \cdot 6^{-2\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^{6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^6} = 6^2 \\ &= 6^2 = 36 \end{aligned}$$

4)  $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$

**Розв'язок:**

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{16}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$$



Чи є правильним твердження:

- 1) Найбільше значення функції  $y = 0,2^x$  на проміжку  $[-1; 2]$  дорівнює 5;

**Розв'язок:**

$0 < 0,2 < 1 \mid \Rightarrow$  функція  $y = 0,2^x$  – спадна

На проміжку  $[-1; 2]$  її найбільшим значенням буде  $0,2^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$ ,  
отже твердження правильне.

- 2) Областю визначення функції  $y = 4 - 7^x$  є множина дійсних чисел;

**Розв'язок:**

Твердження правильне, за означенням показникової функції.

- 3) Областю значень функції  $y = 6^x + 5$  є проміжок  $[5; +\infty)$

**Розв'язок:**

$6^x$  – додатне число за означенням  $\mid \Rightarrow 6^x + 5 > 5 \Rightarrow E(y) = (5; +\infty)$   
Твердження не правильне.

- 4) Найменше значення функції  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  на проміжку  $[-2; 2]$  дорівнює 16

**Розв'язок:**

$$\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$$

Твердження не правильне.

№7

На якому проміжку найбільше значення функції  $y = 2^x$  дорівнює 16, а  
найменше дорівнює  $\frac{1}{4}$ ?

**Розв'язок:**

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4$$

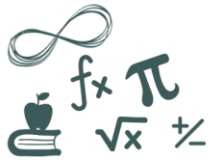
$$x = 4$$

$$2^x = \frac{1}{4}$$

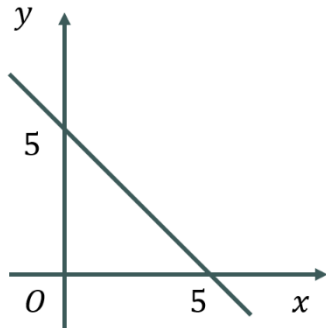
$$2^x = 2^{-2}$$

$$x = -2$$

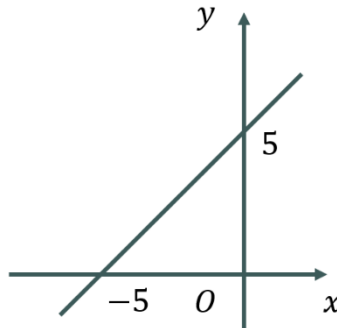
**Відповідь:**  $[-2; 4]$



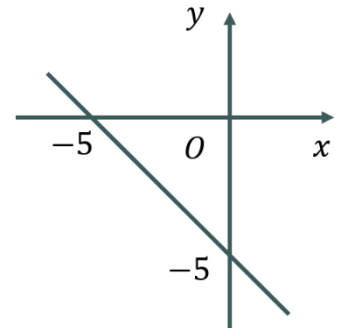
Графік якої з функцій, зображених на рисунках, перетинає графік функції  $y = 5^x$  більше ніж в одній точці?



**A)**



**Б)**



**B)**

### V. Підсумок уроку

- Яку функцію називають показниковою?
- Чи може показникова функція перетнути вісь абсцис?
- Які властивості має степінь з дійсним показником?
- Зобразіть схематично графік функції  $y = a^x$  при  $a > 1$ ; при  $0 < a < 1$
- Через яку точку проходять всі графіки всіх показникових функцій?
- Користуючись побудованими графіками показникових функцій, охарактеризуйте всі їх властивості
- Що називають експонентою?
- Яку цікаву особливість має експонента?
- За якої умови показникова функція зростає? А за якої – спадає?
- Чи може значення показникової функції бути від'ємним?
- Чи може значення показникової функції дорівнювати нулю?

### VI. Домашнє завдання

Опрацювати §1 (ст. 6-9)

Виконати № 1.5; 1.7; 1.11; 1.17

Мерзляк А.Г.

Опрацювати §1

Виконати № 1,5; 1.7; 1.9; 1.21;

Істер О.С.

Опрацювати §1

Виконати № 1.2(2,4); 1.6(3-7); 1.7; 1.11(2);

Нелін Є.П.

Опрацювати §1

Виконати № 8; 23; 27(в); 31;

Бевз Г.П.