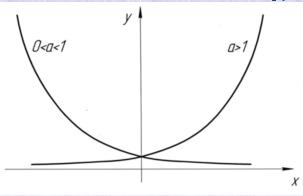
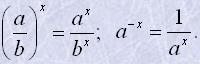
**Показникова та логагифмічна функції**

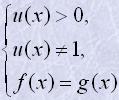
Основні властивості показникової функції y=ax.  
1. Область визначення функції ax – множина R дійсних чисел.  
2. Область значень функції ax (якщо a≠1) – множина R+ всіх додатних дійсних чисел. Якщо a=1, функція ax при всіх x стала: вона дорівнює 1.  
3. Якщо a>1, функція ax зростає на всій числовій прямій; якщо 0<a<1, функція ax спадає на множині R.  


Основні властивості логарифмічної функції y=logax.  
1. Область визначення логарифмічної функції – множина R+ всіх додатних чисел.  
2. Область значень логарифмічної функції – множина R всіх дійсних чисел.  
3. Логарифмічна функція на всій області визначення R+ зростає, якщо a>0 і спадає, якщо 0<a<1.

Властивості степенів  
Для будь-яких x, y і додатних a і b справедливі рівності:  
a0=1; a1=1;  
ax·ay=ax+y; ax:ay=ax-y;  
(ax)y=axy; (ab)x=axbx;  


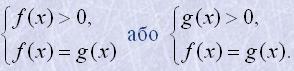
Властивості логарифмів  
1. Якщо x>0, то  
x=alogax.  
2. Логарифм основи дорівнює одиниці  
log aa=1.  
3. Логарифм одиниці дорівнює нулю  
loga1=0 .  
4. Якщо x1>0 і x2>0, то  
loga(x1x2)=logax1+logax2,  
https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/3.jpg  
5. Якщо x>0, то logaxp=plogax,  
де p – будь-яке дійсне число.  
6. Якщо x>0, b>0, b≠1, то  
https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/4.jpg  
Зокрема,  
https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/5.jpg  
logab=logapbp=plogapb

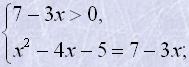
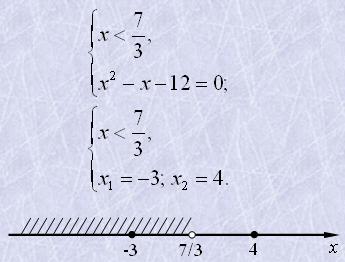
Показникові та логарифмічні рівняння  
1. Показникове рівняння  
af(x)=bg(x) (a>0, a≠1, b>0, b≠1)  
рівносильне рівнянню  
f(x)logca=g(x)logcb,  
де c>0, c≠1.  
  
2. Показникове рівняння  
af(x)=ag(x) (a>0, a≠1)  
рівносильне рівнянню  
f(x)=g(x).  
  
Приклад 1  
Розв’язати рівняння  
1/4·4x2=8·(0,5)3x  
Розв'язання  
2-2·(22)x2·(2-1)3x;  
2-2·22x2=23·2-3x;  
2-2+2x2=23-3x;  
-2+2x2=3-3x;  
2x2+3x-5=0;  
x1=1; x2=-2,5.  
Відповідь: x1=1; x2=-2,5.  
  
Приклад 2  
Розв’язати рівняння  
3·4x+2x·3x-2·9x=0.  
Розв'язання 3·(2x)2+2x·3x-2·(3x)2=0.  
Це є однорідне рівняння. Поділимо ліву і праву частину рівняння на (3x)2.  
3·((2/3)x)2+(2/3)x-2=0  
Нехай (2/3)x=t, тоді  
3·t2+t-2=0;  
t1=2/3; t2=-1<0 - стороній корінь  
(2/3)x=2/3;  
x=1.  
Відповідь: x=1.

3. Коренями рівняння  
(u(x))f(x)=(u(x))g(x),  
є розв'язки мішаної системи  
  
і ті значення x, для яких u(x)=1, якщо при цих значеннях визначені f(x) і g(x).

4. Логарифмічне рівняння  
logaf(x)=b  
рівносильне рівнянню  
f(x)=ab.

Приклад 3  
Розв’язати рівняння log2(x2+4x+3)=3.  
Розв'язання  
Задане рівняння рівносильне рівнянню  
x2+4x+3=23;  
x2+4x+3=8;  
x2+4x-5=0;  
x1=-5; x2=1.  
Відповідь: x1=-5; x2=1.

5. Логарифмічне рівняння  
logaf(x)=logag(x)  
рівносильне одній з таких систем  


Приклад 4  
Розв’язати рівняння log3(x2-4x-5)=log3(7-3x).  
Розв'язання  
Задане рівняння рівносильне системі  
  
Область визначення рівняння:  
  
Відповідь: x1=-3.

6. Для розв'язування рівнянь  
logaf(x)+logag(x)=logau(x),  
logaf(x)-logag(x)=logau(x),  
plogaf(x)=logau(x)  
їх приводять до вигляду  
loga(f(x)g(x))=logau(x),  
https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/10.jpg  
logaf(x)p=logau(x).  
Із знайдених коренів треба включити у відповідь ті, для яких f(x)>0, g(x)>0, u(x)>0.

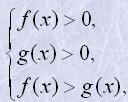
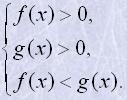
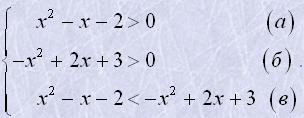
Приклад 5  
Розв’язати рівняння lg(x+3)-21lg(x-2)=lg0,4.  
Розв'язання  
Область визначення рівняння:  
https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/11.jpg  
Застосовуючи властивості логарифмів, виконаємо деякі перетво-рення:  
lg(x+3)=lg(x-2)2+lg0,4;  
x+3=0,4(x-2)2; 0,4x2-2,6x-1,4=0; 2x2-13-7=0; x1=7; x2=-1/2. x2=-1/2 - не входить до області визначення.  
Відповідь: x=7.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 7. Якщо при розв'язуванні рівняння застосовують перетворення виду loga(f(x)g(x)), | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/12.jpg | loga(f(x))p, |

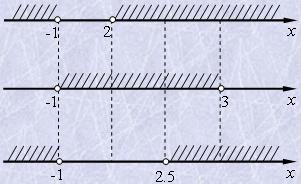
де p – парне число, то виникає небезпека втрати коренів заданого рівняння.  
Щоб запобігти втраті коренів треба користуватись формулами у такому вигляді:  
loga(f(x)g(x))=loga|f(x)|+loga|g(x)|,

|  |  |
| --- | --- |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/12.jpg | =loga|f(x)|-loga|g(x)| |

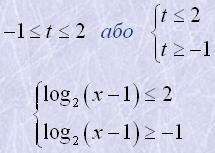
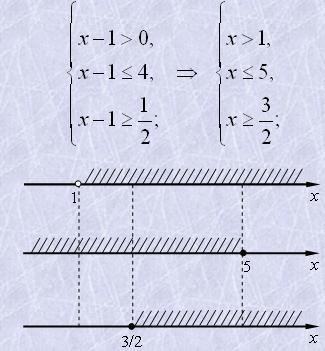
loga(f(x))p=ploga|f(x)|.

Показникові і логарифмічні нерівності  
  
Показникова нерівність (exponential inequality) af(x)>ag(x)  
при a>1 рівносильна нерівності  
f(x)>g(x), а при 0<a<1 – нерівності  
f(x)<g(x).  
  
Логарифмічна нерівність (logarithmic inequality) logaf(x)>logag(x)  
при a>1 рівносильна системі нерівностей  
  
а при 0<a<1 – системі нерівностей  
  
  
Приклад 6  
Розв’язати нерівність  
log0,2(x2-x-2)>log0,2(-x2+2x+3).  
Розв'язання  
Користуючись властивістю логарифмічної функції, отримаємо, що дана нерівність рівносильна системі нерівностей:  
  
Розв’язуємо кожну нерівність системи:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) | б) | в) |
| x2-x-2>0, | -x2+2x+3>0 | x2-x-2>-x2+2x+3 |
| x1=2, x2=-1 | x2-2x-3<0 | 2x2-3x-5>0 |
|  | x1=-1, x2=3 | x1=-1, x2=2,5 |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/16.jpg | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/17.jpg | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/18.jpg |
| x∈(-∞;-1)∪(2;∞) | x∈(-1;3) | x∈(-∞;-1)∪(2,5;∞) |

Знайдемо розв’язання системи:  
  
Відповідь: x∈(2,5;3).  
  
Приклад 7

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Розв’язати нерівність | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/20.jpg | (x-1)-log2(x-1)-2≤0 |

Розв'язання  
Нехай log2(x-1)=t,  
t2-t-2≤0,  
https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/21.jpg  
  
Дана система рівносильна такій системі:  
  
Відповідь: x∈[3/2;5].