**Показникова та логагифмічна функції**

Основні властивості показникової функції y=ax.
1. Область визначення функції ax – множина R дійсних чисел.
2. Область значень функції ax (якщо a≠1) – множина R+ всіх додатних дійсних чисел. Якщо a=1, функція ax при всіх x стала: вона дорівнює 1.
3. Якщо a>1, функція ax зростає на всій числовій прямій; якщо 0<a<1, функція ax спадає на множині R.


Основні властивості логарифмічної функції y=logax.
1. Область визначення логарифмічної функції – множина R+ всіх додатних чисел.
2. Область значень логарифмічної функції – множина R всіх дійсних чисел.
3. Логарифмічна функція на всій області визначення R+ зростає, якщо a>0 і спадає, якщо 0<a<1.

Властивості степенів
Для будь-яких x, y і додатних a і b справедливі рівності:
a0=1; a1=1;
ax·ay=ax+y; ax:ay=ax-y;
(ax)y=axy; (ab)x=axbx;


Властивості логарифмів
1. Якщо x>0, то
x=alogax.
2. Логарифм основи дорівнює одиниці
log aa=1.
3. Логарифм одиниці дорівнює нулю
loga1=0 .
4. Якщо x1>0 і x2>0, то
loga(x1x2)=logax1+logax2,

5. Якщо x>0, то logaxp=plogax,
де p – будь-яке дійсне число.
6. Якщо x>0, b>0, b≠1, то

Зокрема,

logab=logapbp=plogapb

Показникові та логарифмічні рівняння
1. Показникове рівняння
af(x)=bg(x) (a>0, a≠1, b>0, b≠1)
рівносильне рівнянню
f(x)logca=g(x)logcb,
де c>0, c≠1.

2. Показникове рівняння
af(x)=ag(x) (a>0, a≠1)
рівносильне рівнянню
f(x)=g(x).

Приклад 1
Розв’язати рівняння
1/4·4x2=8·(0,5)3x
Розв'язання
2-2·(22)x2·(2-1)3x;
2-2·22x2=23·2-3x;
2-2+2x2=23-3x;
-2+2x2=3-3x;
2x2+3x-5=0;
x1=1; x2=-2,5.
Відповідь: x1=1; x2=-2,5.

Приклад 2
Розв’язати рівняння
3·4x+2x·3x-2·9x=0.
Розв'язання 3·(2x)2+2x·3x-2·(3x)2=0.
Це є однорідне рівняння. Поділимо ліву і праву частину рівняння на (3x)2.
3·((2/3)x)2+(2/3)x-2=0
Нехай (2/3)x=t, тоді
3·t2+t-2=0;
t1=2/3; t2=-1<0 - стороній корінь
(2/3)x=2/3;
x=1.
Відповідь: x=1.

3. Коренями рівняння
(u(x))f(x)=(u(x))g(x),
є розв'язки мішаної системи

і ті значення x, для яких u(x)=1, якщо при цих значеннях визначені f(x) і g(x).

4. Логарифмічне рівняння
logaf(x)=b
рівносильне рівнянню
f(x)=ab.

Приклад 3
Розв’язати рівняння log2(x2+4x+3)=3.
Розв'язання
Задане рівняння рівносильне рівнянню
x2+4x+3=23;
x2+4x+3=8;
x2+4x-5=0;
x1=-5; x2=1.
Відповідь: x1=-5; x2=1.

5. Логарифмічне рівняння
logaf(x)=logag(x)
рівносильне одній з таких систем


Приклад 4
Розв’язати рівняння log3(x2-4x-5)=log3(7-3x).
Розв'язання
Задане рівняння рівносильне системі

Область визначення рівняння:

Відповідь: x1=-3.

6. Для розв'язування рівнянь
logaf(x)+logag(x)=logau(x),
logaf(x)-logag(x)=logau(x),
plogaf(x)=logau(x)
їх приводять до вигляду
loga(f(x)g(x))=logau(x),

logaf(x)p=logau(x).
Із знайдених коренів треба включити у відповідь ті, для яких f(x)>0, g(x)>0, u(x)>0.

Приклад 5
Розв’язати рівняння lg(x+3)-21lg(x-2)=lg0,4.
Розв'язання
Область визначення рівняння:

Застосовуючи властивості логарифмів, виконаємо деякі перетво-рення:
lg(x+3)=lg(x-2)2+lg0,4;
x+3=0,4(x-2)2; 0,4x2-2,6x-1,4=0; 2x2-13-7=0; x1=7; x2=-1/2. x2=-1/2 - не входить до області визначення.
Відповідь: x=7.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 7. Якщо при розв'язуванні рівняння застосовують перетворення виду loga(f(x)g(x)), | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/12.jpg | loga(f(x))p, |

де p – парне число, то виникає небезпека втрати коренів заданого рівняння.
Щоб запобігти втраті коренів треба користуватись формулами у такому вигляді:
loga(f(x)g(x))=loga|f(x)|+loga|g(x)|,

|  |  |
| --- | --- |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/12.jpg | =loga|f(x)|-loga|g(x)| |

loga(f(x))p=ploga|f(x)|.

Показникові і логарифмічні нерівності

Показникова нерівність (exponential inequality) af(x)>ag(x)
при a>1 рівносильна нерівності
f(x)>g(x), а при 0<a<1 – нерівності
f(x)<g(x).

Логарифмічна нерівність (logarithmic inequality) logaf(x)>logag(x)
при a>1 рівносильна системі нерівностей

а при 0<a<1 – системі нерівностей


Приклад 6
Розв’язати нерівність
log0,2(x2-x-2)>log0,2(-x2+2x+3).
Розв'язання
Користуючись властивістю логарифмічної функції, отримаємо, що дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

Розв’язуємо кожну нерівність системи:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) | б) | в) |
| x2-x-2>0, | -x2+2x+3>0 | x2-x-2>-x2+2x+3 |
| x1=2, x2=-1 | x2-2x-3<0 | 2x2-3x-5>0 |
|  | x1=-1, x2=3 | x1=-1, x2=2,5 |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/16.jpg | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/17.jpg | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/18.jpg |
| x∈(-∞;-1)∪(2;∞) | x∈(-1;3) | x∈(-∞;-1)∪(2,5;∞) |

Знайдемо розв’язання системи:

Відповідь: x∈(2,5;3).

Приклад 7

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Розв’язати нерівність | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/20.jpg | (x-1)-log2(x-1)-2≤0 |

Розв'язання
Нехай log2(x-1)=t,
t2-t-2≤0,


Дана система рівносильна такій системі:

Відповідь: x∈[3/2;5].