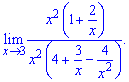
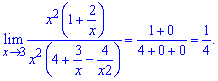
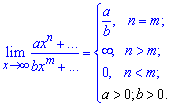
**Границя функції. Методика обчислення**

**Теорія границь** - один з розділів математичного аналізу, який одним під силу освоїти, інші з труднощами обчислюють границі. Питання знаходження границь є досить загальним, оскільки існують десятки прийомів **рішення границь** різних видів. Одні і ті ж границі можна знайти як за правилом Лопіталя, так і без нього. Буває, що розклад в ряд нескінченно малих функцій дозволяє швидко отримати потрібний результат. Існує набір прийомів і хитрощів, що дозволяють знайти границю функції будь-якої складності. В даній статті спробуємо розібратися в основних типах границь, які найбільш часто зустрічаються на практиці. Теорію та означення границі ми тут давати не будемо, в інтернеті безліч ресурсів де це розжовано. Тому займемося практичним обчисленням, саме тут у Вас і починається "не знаю! не вмію! нас не вчили!"

**Обчислення границь методом підстановки**

**Приклад 1.** **Знайти границю функції *Lim((x2-3\*x)/(2\*x+5), x=3).***  
Розв'язання: Такого сорту приклади обчислюють звичайною підстановкою  
проста границя  
Границя рівна *18/11.*  
Нічого складного і мудрого в таких границях немає, підставили значення, обчислили, записали границю у відповідь. Зате на базі таких границь всіх привчають, що перш за все потрібно підставити значення у функцію (принаймі перевірити, що отримаємо? чи - до чого прямує?).  
Далі границі ускладнюють, вводять поняття безмежності, невизначеності і т.д.

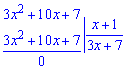
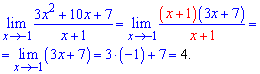
**Границі з невизначеністю типу безмежність розділити на безмежність. Методи розкриття невизначеності**

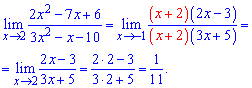
**Приклад 2.** **Знайти границю функції**  
***Lim((x2+2x)/(4x^2+3x-4), x=infinity).***  
Розв'язання: Задана границя типу поліном розділити на поліном, причому змінна прямує до безмежності  
границя  
Проста підстановка значення до якого прямує змінна знайти границю не допоможе, отримаємо невизначеність виду безмежність розділити на безмежність.  
Алгоритм обчислення границі полягає у знаходженні найбільшого степеня "ікс" в чисельнику чи знаменнику. Далі на нього спрощують чисельник і знаменник і знаходять границю  
  
Оскільки значення https://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_04.gif прямують до нуля при змінній прямуючій до безмежності то ними нехтують, або записують в кінцевий вираз у вигляді нулів  
  
Зразу з практики можна отримати два висновки, які є підказкою в обчисленнях. **Якщо змінна прямує до безмежності і степінь чисельника більший від степені знаменника то границя рівна безмежності. В протилежному випадку, якщо поліном в знаменнику старшого порядку ніж в чисельнику границя рівна нулю.**  
Формулами границі можна записати так  
  
Якщо маємо в границі звичайний поліном без дробів, то границя теж рівна безмежності  
https://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_07.gif  
Наступний тип границь стосується поведінки функцій біля нуля.

**Приклад 3.** **Знайти границю функції**  
***Lim((x^2+3x-5)/(x^2+x+2), x=0).***  
Розв'язання: Тут вже виносити найстарший доданок полінома не потрібно. З точністю до навпаки, необхідно знайти найменший степінь чисельника і знаменника та обчислити границю  
границя  
Значення *x^2; x* прямують до нуля коли змінна прямує до нуля https://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_09.gif Тому ними нехтують, таким чином отримаємо  
обчислення границі  
Границя рівна 2,5.

**Границі з невизначеністю типу 0/0 і методи їх обчислень**

Зразу всі згадують правило, що ділити на нуль не можна. Однак в цьому контексті маємо на увазі нескінченно малі функції.  
Розглянемо для наочності приклад

**Приклад 4.** **Знайти границю функції*****Lim((3x^2+10x+7)/(x+1), x=-1).***  
Розв'язання: При підстановці у знаменник *x=-1* отримаємо нуль, те ж саме отримаємо в чисельнику. Отже маємо невизначеність типу *0/0.*  
Боротися з такою невизначеністю просто: потрібно розкласти поліном на множники, а точніше виділити множник, який перетворює все на нуль.  
  
Отже, границю можна записати у вигляді  
  
Ось і вся методика. Так само поступаємо, якщо маємо границі виду многочлен розділити на многочлен.

**Приклад 5.** **Знайти границю функції*****Lim((2x^2-7x+6)/(3x^2-x-10), x=2).***  
Розв'язання: Пряма підстановка показує *2\*4-7\*2+6=0;  
3\*4-2-10=0*  
що маємо невизначеність типу *0/0.*  
Поділимо поліноми на множник, що дає особливість  
https://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_13.gif  
https://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_14.gif  
Є практики, які вчать, що поліноми *2* порядку тобто вигляду "квадратні рівняння" слід розв'язувати через дискримінант. Але моя практика показує, що це довше і заплутаніше, тому позбувайтеся особливості у границі за вказаним алгоритмом. Таким чином записуємо поліноми у вигляді простих множників та підставляємо у границю  
  
Як бачите, нічого складного в обчисленні таких границь немає. Ділити многочлени Ви на момент вивчення границь вмієте, принаймні за програмою мали вже пройти. Серед завдань на невизначеність типу *0/0* зустрічаються такі, в яких потрібно застосовувати формули скороченого множення. Але якщо Ви їх не знаєте, то діленням многочлена на одночлен можна отримати потрібну формулу

**Приклад 6.** **Знайти границю функції**  
***Lim((x^2-9)/(x-3), x=3).***  
Розв'язання: Маємо невизначеність типу *0/0*. В чисельнику застосовуємо формулу скороченого множення  
формула скороченого множення  
і обчислюємо потрібну границю  
границя функції  
В результаті розкриємо ірраціональність та отримаємо 6.

**Метод розкриття невизначеності множенням на спряжене**

Метод застосовують до границь, в яких невизначеність породжують ірраціональні функції. Чисельник або знаменник перетворюється в точці знаходження границі в нуль і невідомо як знайти границю.

**Приклад 7.** **Знайти границю функції**  
***Lim((sqrt(x+2)-sqrt(7x-10))/(3x-6), x=2).*Розв'язання: Подамо границю у вигляді** формули  
невизначеність границі  
При підставленні значення отримаємо невизначеність типу *0/0.*  
Схема обходу даної особливості полягає у множенні ірраціональності на спряжене. Щоб вираз не змінився знаменник потрібно поділити на таке ж значення  
обчислення границі  
За правилом різниці квадратів спрощуємо чисельник та обчислюємо границю

обчислення границі

Спрощуємо доданки, що створюють особливість в границі та виконуємо підстановку  
обчислення границі  
Вкінці залишиться обчислити орені в знаменнику та спротити дріб.

**Приклад 8.** **Знайти границю функції**  
***Lim((sqrt(x-2)-sqrt(2x-5))/(3-x), x=3).***Розв'язання: Границя має особливість виду *0/0.*  
невизначеність границі  
Для розкриття множимо і ділимо на спряжене  
знаходження границі  
Записуємо різницю квадратів  
знаходження границі  
Спрощуємо доданки, що вносять особливість та знаходимо границю  
знаходження границі  
Досить гарний прикад на позбуття особливості методом розкриття ірраціональності.

**Приклад 9.** **Знайти границю функції**  
***Lim((x^2+x-6)/(sqrt(3x-2)-2), x=2).***  
Розв'язання: Підставимо двійку в границю.  
Границя функції  
Отримаємо невизначеність *0/0.*  
Знаменник потрібно помножити на спряжений вираз, а в чисельнику розв'язати квадратне рівняння. Оскільки відомо, що*2* є коренем, то другий корінь знаходимо з теореми Вієта  
https://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_27.gif  
Таким чином чисельник запишемо у вигляді  
https://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim9_28.gif  
та підставимо у границю  
знаходження границі  
Звівши різницю квадратів позбуваємося особливості в чисельнику і знаменнику  
знаходження границі  
Наведеним чином можна позбутися особливості в багатьох прикладах, а застосування треба помічати скрізь, де задано різницю коренів, що перетворюється в нуль при підстановці.